Coxeter-Gruppen*

Manuel Hohmann
Universität Hamburg

14. Januar 2004

1 Coxetersysteme

Definition 1.1 (Coxetermatrix) *Eine symmetrische Matrix η_{ab} heißt* Coxetermatrix*, wenn für alle a, b gilt $\eta_{aa} = 1$ und $\eta_{ab} \in \{2, 3, \ldots\} \cup \{\infty\}$.*

Definition 1.2 (Coxetergruppe) *Eine* Coxetergruppe *ist eine Gruppe W, die erzeugt wird von einem Satz von Generatoren $S \subset W$, wobei gilt*

$$(ss')^{\eta_{ss'}} = 1 \tag{1.1}$$

für alle $s, s' \in S$, wobei $\eta_{ss'}$ eine Coxetermatrix ist. Der Fall $(ss')^{\infty} = 1$ sei so zu verstehen, dass $(ss')^k \neq 1$ für alle $k > 0$ gilt.

Das Paar (W, S) wird als *Coxetersystem* bezeichnet. Als *Rang* einer Coxetergruppe bezeichnet man $|S|$. Im Folgenden sei $|S| < \infty$ vorausgesetzt.

Äquivalent zur Angabe der Coxetermatrix ist die eines *Coxetergraphen*. Jedes Element aus S wird durch einen Knoten dargestellt. Zwei Knoten s, s' werden genau dann durch eine mit $\eta_{ss'}$ bewertete Kante verbunden, wenn $\eta_{ss'} \geq 3$ ist. Die Bezeichnung 3 kann auch weggelassen werden. Daraus folgt, dass zwei Generatoren $s, s' \in S$ einer Coxetergruppe genau dann kommutieren, wenn die entsprechenden Knoten nicht verbunden sind.

Beispiel *Sei $S = \{x, y, z\}$ und*

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Die so erzeugte Coxetergruppe ist isomorph zu S_4, der symmetrischen Gruppe vom Rang 4 (Tetraedergruppe). Dafür wählt man die Transpositionen $x = (2134), y = (3214), z = (1243)$, die S_4 erzeugen und den geforderten Relationen genügen. Der zugehörige Coxetergraph hat die Form

$$\circ - \circ - \circ$$

*Seminarvortrag an der Universität Hamburg, http://www.manuelhohmann.de/mhohmann/download/pub/index.html

2 Die Längenfunktion

Da für alle $s \in S$ die Beziehung $s^2 = 1$ gilt, kann man die Elemente $w \in W$ (i.A. nicht eindeutig) in der Form $w = s_1 s_2 \dots s_r$ schreiben, wobei die $s_i \in S$ nicht notwendigerweise verschieden sind.

Definition 2.1 (Längenfunktion) *Die* Länge $\ell(w)$ *eines Elements* $w \in W$ *ist die minimale Länge* r *aller möglichen Ausdrücke der Form* $s_1 s_2 \dots s_r$ *mit* $s_1 s_2 \dots s_r = w$. *Jedes geordnete* $\ell(w)$*-tupel* $(s_1, s_2, \dots, s_{\ell(w)})$ *mit* $s_1 s_2 \dots s_{\ell(w)} = w$ *wird als* reduzierter Ausdruck *bezeichnet.*

Dabei wird $\ell(1) = 0$ gesetzt. Die Längenfunktion hat folgende Eigenschaften:

(L1) $\ell(w) = \ell(w^{-1})$: Sei $w = s_1 s_2 \dots s_{\ell(w)}$. Dann ist $w^{-1} = s_{\ell(w)} \dots s_2 s_1$ und somit $\ell(w^{-1}) \leq \ell(w)$. Analog folgt $\ell(w) \leq \ell(w^{-1})$.

(L2) $\ell(w) = 1 \Leftrightarrow w \in S$.

(L3) $\ell(ww') \leq \ell(w) + \ell(w')$: Sei $w = s_1 s_2 \dots s_{\ell(w)}$ und $w = s'_1 s'_2 \dots s'_{\ell(w')}$. Dann ist $ww' = s_1 s_2 \dots s_{\ell(w)} s'_1 s'_2 \dots s'_{\ell(w')}$.

(L4) $\ell(ww') \geq \ell(w) - \ell(w')$: Folgt aus L1 und L3.

(L5) $\ell(w) - 1 \leq \ell(ws) \leq \ell(w) + 1$: Folgt aus L2 und L4.

Satz 2.1 *Die Abbildung* $\epsilon : W \to \{1, -1\}, w \mapsto (-1)^{\ell(w)}$ *ist genau dann ein Epimorphismus mit* $\epsilon(s) = -1$ *für alle* $s \in S$, *wenn* W *nicht trivial ist.*

Wenn W trivial ist, ist $\epsilon(W) = \{1\}$. Sei also W nicht trivial angenommen. Die Surjektivität von ϵ folgt aus L2. Weiterhin gilt für $w = s_1 s_2 \dots s_{\ell(w)}$ die Homomorphie $\epsilon(w) = \epsilon(s_1)\epsilon(s_2)\dots\epsilon(s_{\ell(w)}) = (-1)^{\ell(w)}$. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 2.2 *Für alle* $w \in W$ *und* $s \in S$ *gilt* $\ell(ws) = \ell(w) \pm 1$.

Dies folgt unmittelbar aus L5 und der Tatsache, dass $(-1)^{\ell(ws)} = \epsilon(ws) = -\epsilon(w) = -(-1)^{\ell(w)}$ und somit $\ell(ws) \neq \ell(w)$ ist.

Beispiel *Die Elemente der Tetraedergruppe, die oben als Coxetergruppe gegeben ist, haben die Längen*

w	$\ell(w)$	w	$\ell(w)$
(1234)	0	$(3124) = xy$	2
$(1243) = z$	1	$(3142) = xyz$	3
$(1324) = xyx$	3	$(3214) = y$	1
$(1342) = xyxz$	4	$(3241) = yz$	2
$(1423) = xzyx$	4	$(3412) = yzyxyz$	6
$(1432) = xzyxz$	5	$(3421) = yzyxy$	5
$(2134) = x$	1	$(4123) = xzy$	3
$(2143) = xz$	2	$(4132) = xyzy$	4
$(2314) = yx$	2	$(4213) = zy$	2
$(2341) = yzx$	3	$(4231) = yzy$	3
$(2413) = zyx$	3	$(4312) = yzxyz$	5
$(2431) = yzyx$	4	$(4321) = yzxy$	4

3 Geometrische Darstellung von W

Sei V ein reeller, $|S|$-dimensionaler Vektorraum mit Basis $\{\alpha_s | s \in S\}$. Man definiert eine symmetrische, nicht augeartete, i.A. nicht definite Bilinearform B durch

$$B(\alpha_s, \alpha_{s'}) = -\cos \frac{\pi}{\eta_{ss'}} \tag{3.1}$$

wobei $B(\alpha_s, \alpha_{s'}) = -1$ für $\eta_{ss'} = \infty$ gelten soll. Für jedes $s \in S$ definiert man nun einen Endomorphismus $\sigma_s \in \mathrm{GL}(V)$ durch

$$\sigma_s(v) = v - 2B(\alpha_s, v)\alpha_s \tag{3.2}$$

Dieser besitzt folgende Eigenschaften, die einer *Reflektion* entsprechen:

(E1) $\sigma_s(\alpha_s) = -\alpha_s$.

(E2) $\sigma_s(v) = v$ für $B(\alpha_s, v) = 0$. Da die Bilinearform B nicht ausgeartet ist, erhält σ_s eine Hyperebene punktweise.

(E3) $B(\sigma_s(v), \sigma_s(v')) = B(v, v')$ für alle $v, v' \in V$.

Aus dem letzten Punkt folgt, dass die von den σ_s erzeugte Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$ die Bilinearform B erhält.

Satz 3.1 *Die Abbildung $\sigma : S \to \mathrm{GL}(V), s \mapsto \sigma_s$ lässt sich in eindeutiger Weise zu einer Darstellung von der Coxetergruppe W auf V erweitern. Die Gruppe $\sigma(W)$ erhält B und die Ordnung der Elemente $\sigma_s\sigma_{s'}$ ist $\eta_{ss'}$.*

Es genügt zu zeigen, dass

$$(\sigma_s\sigma_{s'})^{\eta_{ss'}} = 1 \tag{3.3}$$

gilt. Für $s = s'$ ist dies offenbar erfüllt. Für $s \neq s'$ ist $V' := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(\alpha_s, \alpha_{s'}) = \mathbb{R}\alpha_s \oplus \mathbb{R}\alpha_{s'}$. Für $v = a\alpha_s + b\alpha_{s'} \in V'$ gilt

$$B(v, v) = a^2 - 2ab\cos\frac{\pi}{\eta_{ss'}} + b^2 = \left(a - b\cos\frac{\pi}{\eta_{ss'}}\right)^2 + b^2\sin^2\frac{\pi}{\eta_{ss'}} \geq 0 \tag{3.4}$$

Für $\eta_{ss'} < \infty$ gilt sogar $B(v, v) > 0$, während für $\eta_{ss'} = \infty$ und $v = \alpha_s + \alpha_{s'}$ gilt $B(v, v) = 0$. Weiter folgt aus der Definition von σ_s und $\sigma_{s'}$, dass $(\sigma_s\sigma_{s'})(V') \subseteq V'$. Daher sei im folgenden die Einschränkung von $\sigma_s\sigma_{s'}$ auf V' betrachtet. Man unterscheidet zwei Fälle:

- $\eta_{ss'} = \infty$: Es gilt $B(\alpha_s, \alpha_{s'}) = -1$. Sei $v = \alpha_s + \alpha_{s'}$. Dann gilt $B(v, \alpha_s) = B(v, \alpha_{s'}) = 0$ und somit $(\sigma_s\sigma_{s'})(v) = v$. Weiterhin gilt $(\sigma_s\sigma_{s'})(\alpha_s) = 2v + \alpha_s$ und somit $(\sigma_s\sigma_{s'})^k(\alpha_s) = 2kv + \alpha_s$. Daher hat $\sigma_s\sigma_{s'}$ unendliche Ordnung auf V' und damit auch auf V.

- $\eta_{ss'} < \infty$: Sei $\theta = \frac{\pi}{\eta_{ss'}}$. Stellt man $\sigma_s\sigma_{s'}$ durch eine Matrix M bezüglich der Basis $\{\alpha_s, \alpha_{s'}\}$ dar, so ergibt sich

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2\cos\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\cos\theta & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin\theta}\begin{pmatrix} \sin 3\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\sin\theta \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

Durch Induktion zeigt man, dass gilt

$$M^k = \frac{1}{\sin\theta} \begin{pmatrix} \sin(2k+1)\theta & -\sin 2k\theta \\ \sin 2k\theta & -\sin(2k-1)\theta \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Daraus folgt insbesondere, dass $M^{\eta_{ss'}}$ die Einheitsmatrix ist. Daher hat $\sigma_s\sigma_{s'}$ die Ordnung $\eta_{ss'}$ auf V'. Da B auf V' positiv definit ist, kann man V zerlegen in V' und dessen orthogonales Komplement, die beide invariant unter $\sigma_s\sigma_{s'}$ sind. Folglich ist $\sigma_s\sigma_{s'}$ die Identität auf dem Komplement von V' und hat somit die Ordnung $\eta_{ss'}$ auf V.

Beispiel *Für die Tetraedergruppe wählt man $V = \mathbb{R}^3$ mit dem üblichen Skalarprodukt bezüglich der kanonischen Basis. Wählt man*

$$\alpha_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \alpha_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

so gilt bezüglich der kanonischen Basis

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Diese erzeugen die Selbstabbildungen eines Tetraeders mit den Eckpunkten

$$e_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

die wie im ersten Kapitel beschrieben permutiert werden. Da die Abbildungen durch Spiegelungen erzeugt werden, sind sie nicht orientierungserhaltend.

4 Wurzelsysteme

Zur Abkürzung sei im folgenden statt $\sigma(w) : V \to V$ die Schreibweise $w : V \to V$ für $w \in W$ benutzt.

Definition 4.1 (Wurzelsystem) *Sei (W, S) ein Coxetersystem und $\sigma : W \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung von W auf V mit der Basis α_s wie oben beschrieben. Das* Wurzelsystem Φ *ist definiert als*

$$\Phi := \{w(\alpha_s) | w \in W, s \in S\} \tag{4.1}$$

Da $\{\alpha_s | s \in S\}$ eine Basis von V ist, kann man die Wurzeln $\alpha \in \Phi$ danach entwickeln:

$$\alpha = \sum_{s \in S} c_s \alpha_s \tag{4.2}$$

Definition 4.2 (Positive und negative Wurzeln) *α heißt* positive *(*negative*) Wurzel, geschrieben $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$), wenn alle $c_s \geq 0$ (≤ 0) sind. Es seien weiter*

$$\Phi^+ := \{\alpha \in \Phi | \alpha > 0\} \tag{4.3a}$$

$$\Phi^- := \{\alpha \in \Phi | \alpha < 0\} \tag{4.3b}$$

Satz 4.1 *Für alle $w \in W$ und $s \in S$ gilt $\ell(ws) > \ell(w)$ genau dann, wenn $w(\alpha_s) > 0$ ist.*

Zunächst werde die Richtung '⇒' bewiesen. Für $\ell(w) = 0$ ist $w = 1$ und somit $w(\alpha_s) = \alpha_s > 0$, also nichts zu beweisen. Für $\ell(w) > 0$ beweist man durch Widerspruch. Sei

$$W' := \{w \in W | \text{Es gibt ein } s \in S \text{ mit } \ell(ws) > \ell(w) \text{ und } w(\alpha_s) \not> 0\} \tag{4.4}$$

nicht leer. Dann kann man ein $w \in W'$ so wählen, dass gilt

$$\ell(w) = \min_{w' \in W'} \ell(w') > 0 \tag{4.5}$$

Man wählt $s \in S$ so, dass gilt $\ell(ws) > \ell(w)$ und $w(\alpha_s) \not> 0$. Da $\ell(w) > 0$ ist, gibt es ein $s' \in S$ mit $\ell(ws') < \ell(w)$. Offenbar gilt $s \neq s'$. Sei nun $w_1 = ws'$. Es gilt somit $\ell(w_1 s') = \ell(w) > \ell(w_1)$. Dies wird induktiv fortgesetzt, indem man definiert

$$w_{i+1} := \begin{cases} w_i s & \text{wenn } i \text{ ungerade} \\ w_i s' & \text{wenn } i \text{ gerade} \end{cases} \tag{4.6}$$

Man setzt dies genau so lange fort, wie $\ell(w_{i+1}) < \ell(w_i)$ ist. Dies liefert eine endliche Folge $w = w_0, w_1, \ldots, w_k$ mit $\ell(w_i) = \ell(w) - i$. k sei maximal gewählt, es gelte also sowohl $\ell(w_k s) > \ell(w_k)$ also auch $\ell(w_k s') > \ell(w_k)$. Offenbar ist $1 \leq k \leq \ell(w)$ und damit $\ell(w) - 1 \geq \ell(w_k) \geq 0$. Wegen (4.5) gilt daher $w_k \notin W'$ und somit sowohl $w_k(\alpha_s) > 0$ als auch $w_k(\alpha_{s'}) > 0$.

Sei $v = w_k^{-1} w$, also $w = w_k v$. Dann ist v alternierendes Produkt von s und s' aus insgesamt k Faktoren mit dem letzten Faktor s' und $\ell(v) = k \leq \eta_{ss'}$. Letzteres gilt wegen

$$1 = (ss')^{\eta_{ss'}} = \underbrace{\overbrace{ss' \ldots}^{2\eta_{ss'} - k \text{ Faktoren}}}_{= v^{-1}} v \tag{4.7}$$

Man betrachtet nun die Einschränkung von v auf $V' := \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(\alpha_s, \alpha_{s'}) = \mathbb{R}\alpha_s \oplus \mathbb{R}\alpha_{s'}$. Es gilt

$$v(\alpha_s) := \begin{cases} (ss')^m(\alpha_s) & \text{wenn } k = 2m \text{ gerade} \\ -(s's)^{m+1}(\alpha_s) & \text{wenn } k = 2m+1 \text{ ungerade} \end{cases} \tag{4.8}$$

Sei nun $v(\alpha_s) = a\alpha_s + b\alpha_{s'}$. Man unterscheidet nun die Fälle

$$\eta_{ss'} = \infty, k = 2m \quad \Rightarrow v(\alpha_s) = (2m+1)\alpha_s + 2m\alpha_{s'} \tag{4.9a}$$

$$\eta_{ss'} = \infty, k = 2m+1 \quad \Rightarrow v(\alpha_s) = (2m+1)\alpha_s + (2m+2)\alpha_{s'} \tag{4.9b}$$

$$\eta_{ss'} < \infty, k = 2m \quad \Rightarrow v(\alpha_s) = \frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}\alpha_s + \frac{\sin 2m\theta}{\sin\theta}\alpha_{s'} \tag{4.9c}$$

$$\eta_{ss'} < \infty, k = 2m+1 \quad \Rightarrow v(\alpha_s) = \frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}\alpha_s + \frac{\sin(2m+2)\theta}{\sin\theta}\alpha_{s'} \tag{4.9d}$$

wobei $\theta = \frac{\pi}{\eta_{ss'}}$ ist. Aus $1 \leq k \leq \eta_{ss'}$ folgt, dass $a \geq 0$ und $b \geq 0$ ist. Daher gilt

$$w(\alpha_s) = w_k(v(\alpha_s)) = w_k(a\alpha_s + b\alpha_{s'}) = a w_k(\alpha_s) + b w_k(\alpha_{s'}) > 0 \tag{4.10}$$

im Widerspruch zur Annahme $w(\alpha_s) \not> 0$.

Um '$\Leftarrow$' zu beweisen, wendet man '$\Rightarrow$' auf ws an. Sei $w(\alpha_s) > 0$. Dann ist $(ws)(\alpha_s) = -w(\alpha_s) < 0$. Folglich gilt $\ell(w) = \ell((ws)s) < \ell(ws)$. Daraus folgt weiter

Satz 4.2 *Jede Wurzel ist entweder positiv oder negativ:* $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$.

Für $\alpha \in \Phi$ existiert per definitionem ein $w \in W$ und ein $s \in S$ mit $\alpha = w(\alpha_s)$. Es gilt stets entweder $\ell(ws) > \ell(w)$ oder $\ell(ws) < \ell(w)$. Im ersten Fall ist nach obigem Satz $\alpha = w(\alpha_s) > 0$. Im Fall $\ell(ws) < \ell(w)$ wendet man den Satz auf ws an Stelle von w an. Es gilt $\ell((ws)s) > \ell(ws)$ und somit $w(s(\alpha_s)) > 0$. Weiter gilt $s(\alpha_s) = -\alpha_s$ und, da w linear auf V operiert, $w(s(\alpha_s)) = w(-\alpha_s) = -w(\alpha_s) > 0$. Daraus folgt $\alpha = w(\alpha_s) < 0$.

Satz 4.3 *Die Darstellung* $\sigma : W \to \mathrm{GL}(V)$ *ist treu.*

Sei $w \neq 1$. Dann ist $\ell(w) > 0$ und es gibt ein $s \in S$ mit $\ell(ws) < \ell(w)$. Folglich gilt $w(\alpha_s) < 0$ und somit $w(\alpha_s) \neq \alpha_s > 0$, also $w \notin \ker \sigma$.

Das Wurzelsystem hat folgende Eigenschaften:

(W1) Für alle $\alpha \in \Phi$ gilt $\mathbb{R}\alpha \cap \Phi = \{-\alpha, \alpha\}$: Da α Wurzel ist, gibt es ein $w \in W$ und $s \in S$ mit $\alpha = w(\alpha_s)$. Dann ist auch $-\alpha = ws(\alpha_s) \in \mathbb{R}\alpha \cap \Phi$ und somit $\{-\alpha, \alpha\} \subset \mathbb{R}\alpha \cap \Phi$. Da für alle $s \in S$ gilt $B(\alpha_s, \alpha_s) = 1$ und die Bilinearform B invariant unter der Wirkung von w ist, gilt für alle $\alpha' \in \Phi$ die Beziehung $B(\alpha', \alpha') = 1$. Daraus folgt $\{-\alpha, \alpha\} \supset \mathbb{R}\alpha \cap \Phi$ und damit die Behauptung.

(W2) Sei $\alpha \in \Phi$ eine Wurzel. Φ ist invariant unter der Spiegelung $\sigma_\alpha : V \to V, v \mapsto v - 2B(v, \alpha)\alpha$: Sei $\alpha = w(\alpha_s)$ mit $w \in W$ und $s \in S$. Man betrachtet die Abbildung $wsw^{-1} : V \to V$. Es gilt

$$\begin{aligned} wsw^{-1}(v) &= w\left(w^{-1}(v) - 2B\left(w^{-1}(v), \alpha_s\right)\alpha_s\right) \\ &= v - 2B\left(w^{-1}(v), \alpha_s\right) w(\alpha_s) = v - 2B(v, \alpha)\alpha = \sigma_\alpha(v) \end{aligned} \tag{4.11}$$

Daher gilt $\sigma_\alpha = wsw^{-1} \in W$ und somit $\sigma_\alpha(\Phi) = \Phi$.

Beispiel *Mit den genannten Definitionen gilt für das Wurzelsystem der Tetra-*

edergruppe

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_x, \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\alpha_x$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_z, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\alpha_z$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \alpha_y, \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\alpha_y$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \alpha_y + \alpha_x, \qquad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\alpha_y - \alpha_x$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \alpha_y + \alpha_z, \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\alpha_y - \alpha_z$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \alpha_y + \alpha_x + \alpha_z, \qquad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\alpha_y - \alpha_x - \alpha_z$$