

Nichtlineare Dynamik und Chaos

Manuel Hohmann
Joachim Brod

6. Oktober 2004

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbemerkungen	2
2	Definitionen	2
2.1	Dynamische Systeme	2
2.2	Attraktoren	2
2.3	Poincare-Schnitte	2
2.4	Stabilität von Fixpunkten	2
2.5	Der Lyapunov-Exponent	3
2.6	Beispiele	3
3	Feigenbaum-Szenarien	3
3.1	Bifurkationen	3
3.2	Die Feigenbaum-Konstante	5
4	Der Duffing-Oszillator	6
5	Der nichtlineare Schwingkreis	8
5.1	Theoretischer Teil	8
5.2	Praktischer Teil	9
5.2.1	Allgemeines	9
5.2.2	Darstellung von Strom und Spannung	9
5.2.3	Der Poincare-Schnitt	10
5.2.4	Das Bifurkationsdiagramm	11
6	Zusammenfassung	11

1 Vorbemerkungen

In dem Versuch geht es um die Untersuchung nichtlinearer dynamischer Systeme. Insbesondere soll gezeigt werden, wie diese Systeme chaotisches Verhalten produzieren. Dafür werden mehrere Systeme am Computer simuliert, die sowohl geordnetes als auch chaotisches Verhalten aufweisen. Schließlich wird mit dem nichtlinearen Schwingkreis ein System simuliert und mit einem realen Schwingkreis verglichen.

2 Definitionen

2.1 Dynamische Systeme

Ein dynamisches System besteht aus einer Trägermenge X (dem Phasenraum) und einer Einparameter-Halbgruppe von Funktionen $f^{(t)} : X \rightarrow X, t \in \Gamma$, wobei Γ als Zeitmenge bezeichnet wird. In den hier betrachteten Fällen ist stets $X = \mathbb{R}^n$ oder eine Teilmenge davon. Weiterhin sei stets $\Gamma = \mathbb{N}$ (zeitdiskrete Dynamik) oder $\Gamma = \mathbb{R}^+$ (zeitkontinuierliche Dynamik). Im Fall $\Gamma = \mathbb{N}$ genügt die Angabe von $f := f^{(1)}$, da gemäß der Halbgruppeneigenschaft $f^{(t)} = f^t$ gilt. Im Fall $\Gamma = \mathbb{R}^+$ sei die Dynamik als differenzierbar vorausgesetzt, die Ableitung $f^{(t)'} = \frac{df^{(t)}}{dt}$ soll also existieren. Dann gilt für einen kleinen Zeitschritt dt näherungsweise $f^{(dt)} \approx dt f^{(0)'}$ und $f^{(n dt)} = (f^{(dt)})^n$. Damit ist die kontinuierliche Dynamik auf eine diskrete Dynamik zurückgeführt.

Ausgehend von einem Punkt $x_0 \in X$ ist durch die Abbildung $x_t := f^{(t)}(x_0)$ eine Abbildung von Γ nach X definiert, die als Trajektorie (oder Orbit) zum Punkt x_0 bezeichnet wird.

2.2 Attraktoren

Ein Attraktor A ist eine Teilmenge des Phasenraumes X mit folgenden Eigenschaften:

- A ist invariant unter der Dynamik.
- Es existiert eine Umgebung U von A (das Einzugsgebiet des Attraktors), sodass sich alle Orbits, die zu Punkten aus U gehören, A asymptotisch nähern.
- A kann nicht in mehrere Attraktoren mit verschiedenen Einzugsgebieten zerlegt werden.

2.3 Poincare-Schnitte

Im Versuch werden zwei Systeme untersucht, die eine kontinuierliche Dynamik mit periodischer Zeitabhängigkeit besitzen. Betrachtet man die zeitliche Entwicklung eines solchen Systems während einer Periode, so erhält man eine diskrete Dynamik. Dies wird als Poincare-Schnitt bezeichnet.

2.4 Stabilität von Fixpunkten

Gegeben sei ein eindimensionales zeitdiskretes System der Form $x_{n+1} = f(x_n)$, wobei f eine differenzierbare Funktion ist. Ein Punkt x^* heißt Fixpunkt, wenn $x^* = f(x^*)$ ist. Ein Fixpunkt heißt stabil, wenn er zugleich ein Attraktor ist. Im Falle eindimensionaler Systeme kann man also insbesondere ein $\epsilon > 0$ wählen, sodass für alle x_0 mit $|x_0 - x^*| \leq \epsilon$ die Folge $x_{n+1} = f(x_n)$ gegen x^* konvergiert.

Sei $x_0 = x^* + \delta$ mit $|\delta| < \epsilon$ hinreichend klein für eine Taylorentwicklung:

$$x_1 = f(x_0) = f(x^* + \delta) \approx f(x^*) + \delta f'(x^*) = x^* + \delta f'(x^*) \quad (2.1)$$

Daraus folgt, dass $|x_1 - x^*| < |x_0 - x^*|$ gilt, wenn $|f'(x^*)| < 1$ ist. In diesem Fall ist der Fixpunkt folglich stabil, während im Fall $|f'(x^*)| > 1$ der Fixpunkt instabil ist.

2.5 Der Lyapunov-Exponent

Die Lyapunov-Exponenten sind ein Maß für den Informationsverlust in einem dynamischen System. Im Folgenden werden nur eindimensionale zeitdiskrete Systeme der Form $x_{n+1} = f(x_n)$ betrachtet. In diesem Fall gibt es nur einen Lyapunov-Exponenten, der berechnet wird durch

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |f'(x_i)| \quad (2.2)$$

Das Vorzeichen des Lyapunov-Exponenten bestimmt das Verhalten des dynamischen Systems. $\lambda < 0$ führt zu Stabilität, während $\lambda > 0$ zu Chaos führt. Durch die Verwendung des Limes hängt der Lyapunov-Exponent nur vom Attraktor ab, zu dessen Einzugsgebiet der Startpunkt x_0 gehört.

2.6 Beispiele

Im Versuch werden die folgenden vier nichtlinearen dynamischen Systeme untersucht:

- Die logistische Gleichung. Es sei $X = [0, 1]$ und $\Gamma = \mathbb{N}$. Die Dynamik ist gegeben durch eine Familie von Abbildungen $f_a : X \rightarrow X, x \mapsto ax(1 - x)$, wobei $a \in [0, 4]$ ein Parameter ist. Diese beschreiben die Entwicklung einer Population, wobei die Anzahl $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$ der Individuen der Generation $n + 1$ proportional zur Produkt aus der Anzahl der bereits vorhandenen Individuen (Vermehrung) und den verbliebenen Ressourcen ist.
- Die Sinus-Abbildung. Diese Abbildung hat große Ähnlichkeit mit der bereits genannten logistischen Abbildung. In diesem Fall ist $X = [0, \pi]$, $\Gamma = \mathbb{N}$ und $f_a(x) = a \sin x$ für $a \in [0, \pi]$.
- Der Duffing-Oszillator. Es handelt sich hierbei um einen anharmonischen, gedämpften, erzwungenen Oszillator mit der Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + \beta x^3 = \epsilon \cos \Omega t \quad (2.3)$$

Um dies auf die bekannte Form zu bringen, definiert man $y = \dot{x}$ und $\theta = \Omega t$. Dann ist durch die Gleichungen

$$\frac{dy}{dt} = \epsilon \cos \theta - \lambda y - \beta x^3 \quad (2.4a)$$

$$\frac{dx}{dt} = y \quad (2.4b)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \Omega \quad (2.4c)$$

eine kontinuierliche Dynamik gegeben.

- Der nichtlineare Schwingkreis. Ersetzt man in einem elektrischen Schwingkreis den Kondensator durch eine Diode, so erhält man einen nichtlinearen Oszillator. Dieses System wird später genauer beschrieben.

3 Feigenbaum-Szenarien

3.1 Bifurkationen

In diesem Abschnitt werden zeitdiskrete dynamische Systeme betrachtet, deren Dynamik von einem reellen Parameter abhängt. Diese haben im Folgenden stets die Form $x_{n+1} = f_a(x_n) =$

$af(x_n)$ mit $x_n \in X$, wobei X ein reelles Intervall, f eine glatte Funktion und $a \in \mathbb{R}$ ein reeller Parameter sind. Es wird untersucht, wie sich die Dynamik in Abhängigkeit des Parameters a verhält.

Im Versuch werden die logistische Abbildung $f(x) = x(1-x)$ und die Sinus-Abbildung $f(x) = \sin x$ untersucht. Diese Systeme weisen periodenverdoppelnde Bifurkationen sowie Chaos und Intermittenz auf. Diese Begriffe werden am Beispiel der logistischen Abbildung näher erläutert.

Aus der Gleichung $x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$ geht hervor, dass es zwei Fixpunkte $x^0 = 0$ und $x^* = 1 - \frac{1}{a}$ gibt. Ihre Stabilität erhält man aus $f'_a(x^0) = a$ und $f'_a(x^*) = 2 - a$.

- Für $0 \leq a \leq 1$ ist x^0 ein stabiler Fixpunkt, während x^* instabil ist.
- Bei $a = 1$ wird der Fixpunkt x^0 instabil. Stattdessen wird x^* zu einem stabilen Fixpunkt und ist im Bereich $1 \leq a \leq 3$ stabil. Im Fall $a = 2$ ist $f'_a(x^*) = 0$. Man bezeichnet dies als superattraktiven Fall.
- Bei $a = 3$ wird auch x^* instabil, es gibt folglich keinen stabilen Fixpunkt von f_a mehr. Dafür findet man, dass f_a^2 nun zwei stabile Fixpunkte besitzt, die gegeben sind durch

$$x^\pm = \frac{a + 1 \pm \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a} \quad (3.1)$$

Für diese Punkte gilt $f_a(x^\pm) = x^\mp$ und $f_a^2(x^\pm) = x^\pm$. Es handelt sich also um eine Zweierperiode. Um ihre Stabilität zu untersuchen, berechnet man daher die Ableitung von f_a^2 :

$$(f_a^2)'(x^\pm) = 4 - a(a-2) \quad (3.2)$$

Folglich ist die Zweierperiode im Bereich $3 \leq a \leq 1 + \sqrt{6}$ stabil und besitzt einen superattraktiven Punkt bei $a = 1 + \sqrt{5}$. Den Punkt $a = 3$, bei dem der Fixpunkt durch eine Zweierperiode ersetzt wird, bezeichnet man als periodenverdoppelnde Bifurkation oder Periodenverdopplung.

- Lässt man a weiter wachsen, so treten weitere Periodenverdopplungen auf. Man erhält zwei Folgen, die Folge der Bifurkationspunkte $b_1 = 3, b_2 = 1 + \sqrt{6}, \dots$ und der superattraktiven Punkte $s_1 = 2, s_2 = 1 + \sqrt{5}, \dots$, die gegen den Feigenbaum-Punkt $b_\infty = s_\infty = 3,56994567187904\dots$ konvergieren.
- Für größere Werte von a ist das Verhalten chaotisch, es gibt keine stabilen Fixpunkte oder Perioden mehr. Der chaotische Bereich weist jedoch Bereiche auf, in denen wieder periodisches Verhalten zu finden ist. Dies bezeichnet man als Intermittenz.

Zur Veranschaulichung dieses Szenarios, das als Feigenbaum-Szenario bezeichnet wird, verwendet man ein Bifurkationsdiagramm. Dabei wird auf der Abszisse der Parameter a aufgetragen, während auf der Ordinate die Folgen x_n aufgetragen werden. Beispiele für Bifurkationsdiagramme sind in Abbildung 1 dargestellt. Im Anhang befinden sich weitere Bifurkationsdiagramme für die logistische Abbildung und die Sinus-Abbildung.

Zusätzlich wurden die Lyapunov-Exponenten als Funktion des Parameters a aufgetragen. Im periodischen Bereich, für Parameterwerte unterhalb des Feigenbaum-Punktes, ist der Lyapunov-Exponent negativ. An den Bifurkationspunkten ist $\lambda = 0$, während an den superattraktiven Punkten $\lambda = -\infty$ ist. Im chaotischen Bereich ist $\lambda > 0$. Die Intermittenzen sind wieder durch $\lambda < 0$ gekennzeichnet. Man erkennt, dass auch die Intermittenzen Periodenverdopplungen aufweisen und so wieder ins Chaos übergehen.

Abbildung A1 zeigt einen Ausschnitt aus dem Bifurkationsdiagramm der logistischen Abbildung. Man erkennt den Übergang ins Chaos sowie Intermittenzen mit dreifacher und fünffacher Periode.

Abbildung A2 zeigt das Bifurkationsdiagramm der Sinus-Abbildung. Im Parameterbereich $a > \pi$ werden auch negative x -Werte erreicht. Daneben ist der Lyapunov-Exponent dargestellt. Man erkennt $\lambda = 0$ für die Bifurkationspunkte, $\lambda > 0$ im chaotischen Bereich und $\lambda < 0$ im stabilen

Bereich und in den Intermittenzen. Der Übergang ins Chaos ist in Abbildung A3 vergrößert dargestellt. Man erkennt mehrere Singularitäten für den Lyapunov-Exponenten. Die Abbildungen A4 und A5 zeigen zwei Intermittenzen. Der erneute Übergang ins Chaos durch Periodenverdopplungen ist vor allem bei der zweiten Grafik deutlich zu erkennen. Abbildung A6 zeigt eine Intermittenz für $a > \pi$.

3.2 Die Feigenbaum-Konstante

M. Feigenbaum hat gezeigt, dass für eine Klasse nichtlinearer dynamischer Systeme die Folgen s_n und b_n aus dem vorherigen Abschnitt gegen eine geometrische Reihe konvergieren.[3] Es existieren also die Limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n - s_{n-1}}{s_{n+1} - s_n} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - b_{n-1}}{b_{n+1} - b_n} \quad (3.3)$$

Insbesondere sind beide Limes unabhängig von der speziellen Wahl des Systems gleich $\delta = 4.6692016091029\dots$, wenn die Abbildung f die folgenden Bedingungen erfüllt

- f ist eine glatte Funktion, die ein reelles Intervall $[a, b]$ in sich abbildet.
- f hat ein Maximum an der Stelle x_m mit $f''(x_m) \neq 0$.
- f ist monoton auf $[a, x_m)$ und $(x_m, b]$.
- f hat auf dem gesamten Intervall eine negative Schwarz'sche Ableitung, d.h.

$$\frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2 < 0 \quad (3.4)$$

Zur Berechnung von δ bietet es sich an, die superattraktiven Punkte s_n zu verwenden. Diese sind dadurch gekennzeichnet, dass der Lyapunov-Exponent dort $-\infty$ ist. Das bedeutet, dass für einen Punkt x aus dem Grenzyklus gelten muss $f'(x) = 0$. Da aber n.V. f nur ein Maximum bei x_m besitzt und ansonsten monoton ist, ist folglich x_m ein Element des Grenzyklus. Wenn dieser die Periode N hat, gilt $f^N(x_m) = x_m$. Zur Bestimmung der superattraktiven Punkte kann man daher das Newton-Verfahren zur Lösung von $f^N(x_m) - x_m = 0$ anwenden.[1]

Um das Newton-Verfahren anwenden zu können, betrachtet man $f_a^N(x_m) - x_m =: g(a)$ als Funktion des Parameters a . Man kann sowohl $g(a)$ als auch $g'(a)$ iterativ berechnen. Dafür sei $x_0 = x_m$ und $x_{i+1} = f_a(x_i)$. Es gilt also $g(a) = x_N - x_0$ und $g'(a) = x'_N - x'_0$. Die Ableitungen berechnet man iterativ gemäß

$$x'_{i+1} = \frac{d}{da} f_a(x_i) = \frac{\partial f}{\partial a}(x_i) + f'_a(x_i)x'_i \quad (3.5)$$

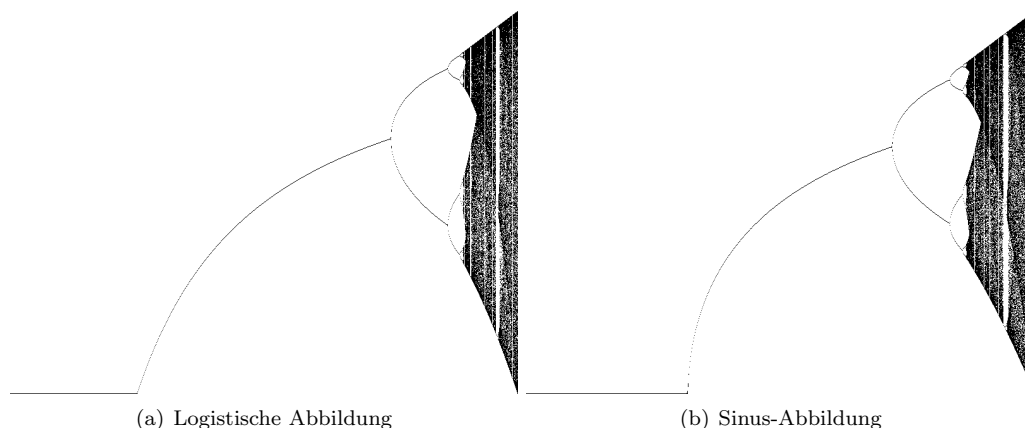


Abbildung 1: Bifurkationsdiagramme.

Im Fall der logistischen Abbildung ist $x_0 = \frac{1}{2}$ und $x'_0 = 0$. Bei der Sinus-Abbildung ist $x_0 = \frac{\pi}{2}$ und $x'_0 = 0$.

Die maximal erreichbare Genauigkeit ist durch die zur Verfügung stehende Rechengenauigkeit begrenzt. Insbesondere begrenzt die Tatsache, dass die s_n sich einer geometrischen Reihe nähern, die Genauigkeit erheblich. Die Differenz $s_{n+1} - s_n$ zweier aufeinanderfolgender superattraktiver Punkte nimmt exponentiell mit n ab. Wenn die ersten k Stellen von s_{n+1} und s_n übereinstimmen und die Genauigkeit beider Zahlen m Stellen beträgt, besitzt ihre Differenz nur noch $m - k$ signifikante Stellen. Entsprechend hat der Quotient $\frac{s_n - s_{n-1}}{s_{n+1} - s_n}$ maximal $m - k$ signifikante Stellen. Der Quotient nähert sich damit zwar immer weiter der Feigenbaum-Konstanten δ , besitzt aber immer weniger signifikante Stellen. Schließlich stimmen alle signifikanten Stellen mit δ überein und die maximale Genauigkeit ist erreicht. Führt man die Berechnung mit einer Genauigkeit von 19 Stellen aus (die maximale Genauigkeit eines x87-Coprozessors im long-double-Format), so wird dieser Fall bereits bei $n = 15$ erreicht. Tabelle 1 enthält die Ausgabe eines C-Programms, das nach dem genannten Verfahren die Feigenbaum-Konstante für die logistische Abbildung und für die Sinus-Abbildung berechnet. Im ersten Fall stimmt das Ergebnis bis auf 7 Stellen mit δ überein, im zweiten Fall sind es 6 Stellen.

Um höhere Genauigkeiten zu erreichen, muss man mathematische Operationen mit Zahlen beliebiger Genauigkeit ohne Einsatz eines Coprozessors ausführen. Dies erhöht jedoch die Rechenzeit. Mit einem modernen PC mit Mathematica erreicht man bei einer Genauigkeit von 30 Stellen in etwa 60 Minuten $n = 24$ für die logistische Abbildung und $n = 22$ für die Sinus-Abbildung (die wegen der Berechnung einer transzendenten Funktion aufwendiger ist). Tabelle 2 und Tabelle 3 enthalten die Ausgaben eines Mathematica-Programms für die logistische Abbildung und die Sinus-Abbildung. Hier wird auch die Genauigkeit des berechneten Quotienten berücksichtigt, weshalb die Anzahl der Stellen in der Ausgabe abnimmt. Die Ergebnisse stimmen bis auf 13 Stellen mit δ überein.

4 Der Duffing-Oszillator

Der Duffing-Oszillator ist ein anharmonischer Oszillator, der durch ein x^4 -Potential beschrieben werden kann. Mit Dämpfung und periodischer äußerer Kraft folgt er der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + \beta x^3 = \epsilon \cos \Omega t \quad (4.1)$$

Setzt man $y = \dot{x}$ und $\theta = \Omega t$, so erhält man die Gleichungen

$$\frac{dy}{dt} = \epsilon \cos \theta - \lambda y - \beta x^3 \quad (4.2a)$$

$$\frac{dx}{dt} = y \quad (4.2b)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \Omega \quad (4.2c)$$

Der Phasenraum besteht also aus den Größen x, y, θ , die die Position und die Geschwindigkeit des Oszillators sowie die Erregerphase beschreiben. Die Parameter des Systems sind die Amplitude ϵ und Kreisfrequenz Ω des Erregers sowie die Dämpfung λ und Federkonstante β des Oszillators.

Zur numerischen Lösung dieses Gleichungssystems wird das Euler-Verfahren eingesetzt. Dabei werden die Differentialgleichungen durch Differenzgleichungen ersetzt. An die Stelle des Differentials dt tritt ein diskreter Zeitschritt Δt . Für das Gleichungssystem erhält man

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta t \cdot (\epsilon \cos \theta(t) - \lambda y(t) - \beta x(t)^3) \quad (4.3a)$$

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t \cdot y \quad (4.3b)$$

$$\theta(t + \Delta t) = \theta(t) + \Delta t \cdot \Omega \quad (4.3c)$$

Der Fehler bei diesem Lösungsverfahren ist proportional zu Δt . Für die Durchführung des Versuchs ist es ausreichend, wenn Δt klein gegen eine Schwingungsperiode ist.

n	Logistisches Map		Sinus-Map	
	s_n	δ_n	s_n	δ_n
3	3.498561699	4.708943014	2.658988013	4.108694064
4	3.554640863	4.680770998	2.706326094	4.499713465
5	3.566667380	4.662959611	2.716516886	4.645181718
6	3.569243532	4.668403926	2.718701840	4.664074912
7	3.569795294	4.668953741	2.719169901	4.668105672
8	3.569913465	4.669157181	2.719270150	4.668966708
9	3.569938774	4.669191002	2.719291620	4.669151334
10	3.569944195	4.669199471	2.719296219	4.669190839
11	3.569945355	4.669201135	2.719297204	4.669199320
12	3.569945604	4.669201510	2.719297415	4.669200922
13	3.569945657	4.669201587	2.719297460	4.669200927
14	3.569945669	4.669201574	2.719297469	4.669212173
15	3.569945671	4.669201766	2.719297471	4.669163173
16	3.569945672	4.669201460	2.719297472	4.670027993
17	3.569945672	4.668894815	2.719297472	4.664339451

Tabelle 1: Berechnung der Feigenbaumkonstanten in C

n	s_n	δ_n
3	3.49856169932770151999894538194	4.708943013540503313176548318
4	3.55464086276882486536608185195	4.680770998010695381630850653
5	3.56666737985626851397263115746	4.66295961111410258401024021
6	3.56924353163711033780824951091	4.6684039259184002378217398
7	3.56979529374994462051535252961	4.6689537409676227810022570
8	3.56991346542234851484097351967	4.669157181328843482317849
9	3.56993877423330548779344606756	4.66919100248509615088864
10	3.56994419460806493324363334387	4.66919947054772577468605
11	3.56994535548646858089280238231	4.6692011346010422354103
12	3.56994560411107843813411726138	4.669201509513552327347
13	3.56994565735885649972960761457	4.669201587522385507575
14	3.56994566876289996834709766981	4.66920160451218518597
15	3.56994567120529685452891409409	4.6692016081159352226
16	3.56994567172838347420506901921	4.6692016088920690974
17	3.56994567184041260969183447009	4.669201609057758936
18	3.56994567186440581985191574318	4.66920160909331069
19	3.56994567186954443072562811491	4.66920160910091662
20	3.56994567187064496381541689550	4.6692016091025466
21	3.56994567187088066430169344087	4.669201609102896
22	3.56994567187093114412801257625	4.669201609102970
23	3.56994567187094195536096955992	4.66920160910299
24	3.56994567187094427079599723280	4.6692016091030

Tabelle 2: Berechnung der Feigenbaumkonstanten für die logistische Abbildung

n	s_n	δ_n
3	2.65898801276307902190546813613	4.045742417567272560342452876
4	2.70632609376522763043208876571	4.555852749921369169104374853
5	2.71651688583306734966346058340	4.64518171767422836428213885
6	2.71870184046166642470163937598	4.6640749123352452402484542
7	2.71916990069469902476970753871	4.6681056718759836952998718
8	2.71927014990662968241754321185	4.668966708250606516440191
9	2.71929162044908332773845535997	4.66915133360485230019417
10	2.71929621879239385402916852782	4.66919083759928510781662
11	2.71929720361720265276535454192	4.6691993027015950946560
12	2.71929741453654078506876397717	4.669201115077390197150
13	2.71929745970900506680205199549	4.669201503305950224206
14	2.71929746938356364934139732461	4.66920158644349981072
15	2.71929747145555783647032048188	4.6692016042501460533
16	2.71929747189931554090326224061	4.6692016080636445721
17	2.71929747199435485203280417253	4.669201608880396469
18	2.71929747201470936209405862323	4.66920160905531757
19	2.71929747201906867483429587845	4.66920160909278058
20	2.71929747202000230612829279215	4.6692016091008040
21	2.719297472020226136093402501	4.669201609102522
22	2.71929747202024508564854915135	4.669201609102890

Tabelle 3: Berechnung der Feigenbaumkonstanten für die Sinus-Abbildung

Im Versuch wurden die Werte $\Omega = 1$, $\beta = 1$ und $\lambda = 0,08$ verwendet. Dafür werden der zeitliche Verlauf von Auslenkung und Geschwindigkeit graphisch dargestellt. Zusätzlich wird eine Projektion des Phasenraums dargestellt, die nur die Größen x und y enthält. Schließlich wird ein Poincare-Schnitt bei $\theta = 0$ gezeichnet. Die Ergebnisse der Simulation sind im Anhang zusammengestellt.

Zunächst wurde die feste Erregeramplitude $\epsilon = 0,2$ eingestellt und verschiedene Startwerte untersucht. Abbildung B1 zeigt eine kleine Schwingung um den Nullpunkt. Die Amplitude entspricht der Erregeramplitude. In diesem Bereich ist der Potentialverlauf flach, der Oszillator folgt daher der äußeren Kraft. Abbildung B2 zeigt eine Schwingung mit größerer Amplitude, die durch die äußere Anregung aufrechterhalten wird. Die Phasenraumellipse ist verformt, da die Schwingung anharmonisch ist.

Abbildung B3 zeigt eine Schwingung mit der doppelten Periodendauer. Besonders interessant ist die verringerte Symmetrie dieser Lösung: Während die Bewegungsgleichungen invariant unter der Transformation $(x, y, \theta) \rightarrow (-x, -y, \theta + \pi)$ sind, ist dies für die gezeigte Lösung nicht der Fall. Man erwartet daher, dass die genannte Transformation die Lösung auf eine weitere Lösung abbildet. Diese Lösung ist in Abbildung B4 dargestellt.

Eine anschauliche Kombination der beiden vorhergehenden Lösungen ist in Abbildung B5 dargestellt. Diese Lösung hat die dreifache Periodendauer im Vergleich mit der äußeren Kraft.

Im zweiten Versuchsteil wurden verschiedene Werte für die Erregeramplitude eingesetzt. Abbildung B6 zeigt den Fall $\epsilon = 0$, also die Schwingung ohne äußere Kraft. Man erkennt eine gedämpfte, anharmonische Schwingung. Die Dämpfung lässt sich durch eine äußere Kraft kompensieren. Abbildung B7 zeigt den Fall $\epsilon = 1,0$, für den sich eine nichtlineare Schwingung mit konstanter Amplitude ergibt. Für große Erregeramplituden geht das System ins Chaos über. Zwei chaotische Fälle für $\epsilon = 5,56$ und $\epsilon = 7,72$ sind in den Abbildungen B8 und B9 dargestellt.

5 Der nichtlineare Schwingkreis

5.1 Theoretischer Teil

Der nichtlineare Schwingkreis besteht aus einer Reihenschaltung eines Widerstands, einer Spule, einer Diode und einer Wechselspannungsquelle. Die dynamischen Variablen des Systems sind die Stromstärke I , die an der Diode anliegende Spannung V_d und die Phase θ der Wechselspannung. Als Kapazität des Schwingkreises dient die Sperrschicht der Diode. Dabei handelt es sich um einen Bereich mit verringerter Ladungsdichte. Die Breite dieses Bereichs ist von der anliegenden Spannung abhängig. Es handelt sich folglich um eine nichtlineare Kapazität. Weiterhin finden in der Diode Leitungsvorgänge statt, die ebenfalls von der anliegenden Spannung abhängen. Man kann eine Diode somit als eine Parallelschaltung aus Widerstand und Kondensator auffassen, wobei sowohl der Widerstand als auch die Kapazität spannungsabhängig sind.

Die Kapazität der Diode kann beschrieben werden durch

$$C = \begin{cases} C_f \exp\left(-\frac{V_d}{V_t}\right) & \text{wenn } V_d < -\phi \\ C_r \left(1 + \frac{V_d}{\phi}\right) & \text{wenn } V_d > -\phi \end{cases} \quad (5.1)$$

Der Strom durch den inneren Widerstand der Diode hat die Form

$$I = I_f \left(1 - \exp\left(-\frac{V_d}{V_t}\right)\right) \quad (5.2)$$

Zusammen mit den Kirchhoffschen Regeln und den Beziehungen für Strom und Spannung für die

Spule und den ohmschen Widerstand erhält man daraus die Dynamik des Systems:

$$\frac{dV_d}{dt} = \left(I - I_F \left(1 - \exp \left(-\frac{V_d}{V_t} \right) \right) \right) \begin{cases} \frac{1}{C_f} \exp \left(\frac{V_d}{V_t} \right) & \text{wenn } V_d < -\phi \\ \frac{1}{C_r} \left(1 + \frac{V_d}{\phi} \right)^\gamma & \text{wenn } V_d > -\phi \end{cases} \quad (5.3a)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{V_s \cos \theta - V_d - RI}{L} \quad (5.3b)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (5.3c)$$

Wie beim Duffing-Oszillator wird zur Lösung des Gleichungssystems das Euler-Verfahren benutzt. Dabei muss der Zeitschritt Δt klein gegenüber der Resonanzfrequenz sein.

Im Versuch werden die Werte $R = 100\Omega$, $L = 2,367 \cdot 10^{-3}\text{H}$, $V_t = 3,4 \cdot 10^{-2}\text{V}$, $\phi = 0,6\text{V}$, $\gamma = 0,4$, $I_f = 2,8 \cdot 10^{-12}\text{A}$, $C_f = 5,6 \cdot 10^{-17}\text{F}$, $C_r = 8,2 \cdot 10^{-11}\text{F}$ und $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC_r}}$ verwendet.

Zunächst wurde das System für verschiedene Werte der Erregerspannung simuliert. Abbildung C1 zeigt das Ergebnis für $V_s = 1\text{V}$. Die Schwingung ist periodisch und hat die gleiche Periodendauer wie die äußere Anregung. Bei $V_s = 2\text{V}$ (Abbildung C2) liegt die doppelte Periodendauer vor, bei $V_s = 4\text{V}$ (Abbildung C3) die vierfache Periodendauer. Bei höheren Spannungen findet man einen chaotischen Bereich, der in den Abbildungen C4 bis C8 dargestellt wird. Schließlich ergibt sich wieder ein periodischer Vorgang mit der dreifachen Periodendauer (Abbildungen C9 - C11).

Im chaotischen Bereich weist der Poincare-Schnitt eine fraktale Struktur auf. Um dies zu verdeutlichen, wurde für $V_s = 14\text{V}$ die Zahl der dargestellten Punkte auf 100000 erhöht und ein Ausschnitt vergrößert. Das Ergebnis ist in Abbildung C12 dargestellt.

Schießlich wurden Bifurkationsdiagramme für Strom und Spannung angefertigt. Dafür wurden für verschiedene Werte für V_s die im Poincare-Schnitt auftretenden Werte für I bzw. V_d aufgetragen. Die beiden Graphen sind in Abbildung C13 dargestellt. Man erkennt Periodenverdopplungen, Chaos und Intermittenz wie bei den beiden diskreten Systemen, die zu Beginn untersucht wurden.

5.2 Praktischer Teil

5.2.1 Allgemeines

Im praktischen Teil wird ein realer nichtlinearer Schwingkreis untersucht. Dafür wird ein realer Schwingkreis mittels eines Funktionsgenerators angeregt und verschiedene Ergebnisse mit einem Oszilloskop dargestellt. Anschließend wird das Oszilloskopbild mit einer Sofortbildkamera fotografiert, um es für die Dokumentation festzuhalten.

5.2.2 Darstellung von Strom und Spannung

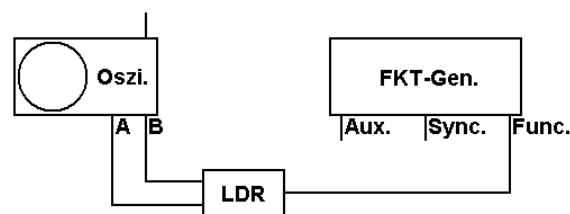


Abbildung 2: Schaltplan zur Darstellung von Strom und Spannung

Für diesen Versuchsteil werden die Spannungen V_d an der Diode und $V_r = RI$ am Widerstand abgegriffen und mit den beiden Eingängen des Oszilloskops verbunden, wie in Abbildung 2 dargestellt. Das Oszilloskop wird zunächst im XY-Modus betrieben, wodurch ein Phasenraumdiagramm

sichtbar wird. Nun wird die Frequenz des Funktionsgenerators bei kleiner Amplitude so eingestellt, dass die Größe des Diagramms maximal wird. Die so eingestellte Resonanzfrequenz des Schwingkreises wird mit dem Oszilloskop vermessen und beträgt 189kHz. Danach wird bei konstanter Frequenz die Amplitude erhöht und die Veränderung des Phasenraumdiagramms beobachtet.

Die Ergebnisse sind in Abbildung 3 dargestellt. Man erkennt eine Schwingung, deren Periodendauer der äußeren Anregung entspricht. Bei wachsender Erregeramplitude kann man drei Periodenverdopplungen erkennen, bis der chaotische Bereich beginnt. Zunächst bilden sich zwei getrennte Bänder, während bei höherer Spannung das gesamte Diagramm ausgefüllt ist. Schließlich bildet sich wieder eine stabile Schwingung mit dreifacher Periode.

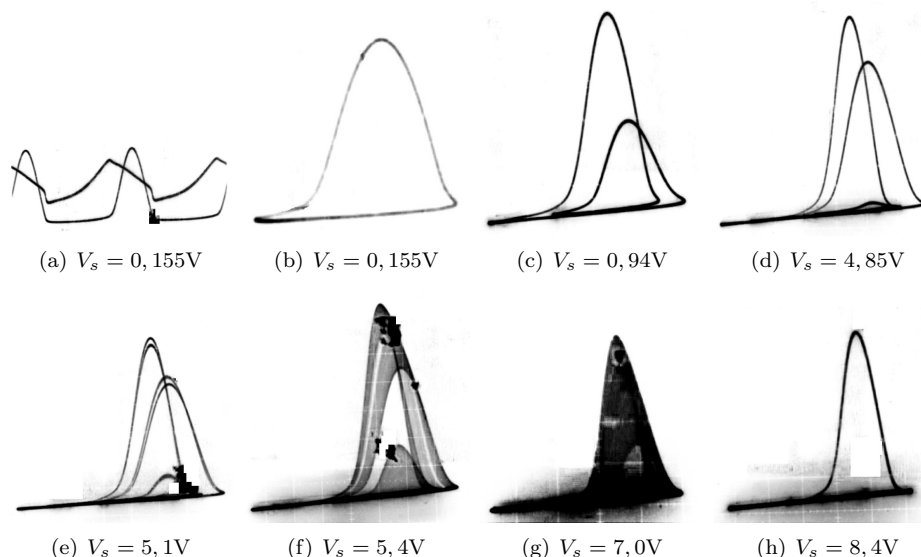


Abbildung 3: Ein x-t-Diagramm und einige Phasenraumdiagramme des realen Schwingkreises.

5.2.3 Der Poincare-Schnitt

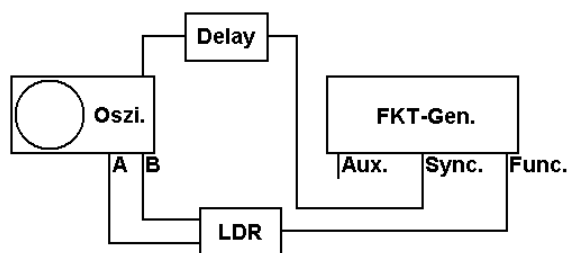


Abbildung 4: Schaltplan für Poincare-Schnitte

Zur Darstellung des Poincare-Schnittes ist es erforderlich, den Oszilloskopstrahl nur einmal kurzzeitig während einer Periode der anliegenden Wechselspannung einzuschalten. Dafür wird der Synchronisations-Ausgang des Funktionsgenerators benutzt, der ein zur Wechselspannung synchrones TTL-Signal ausgibt. Dieses wird über eine Delay-Stufe geleitet, die einen Impuls mit variabler Breite und Verzögerung erzeugt. Die Breite wird möglichst klein eingestellt und über die Verzögerung die Phase der Wechselspannung eingestellt, zu der der Oszilloskopstrahl eingeschaltet wird. Um dies zu erreichen, wird das Ausgangssignal der Delay-Stufe mit dem Steuereingang des Oszilloskops verbunden. Schließlich werden I und V_d wieder im XY-Modus dargestellt. Abbildung 4 zeigt den Schaltplan dafür. Das Ergebnis ist in Abbildung 5 dargestellt.

5.2.4 Das Bifurkationsdiagramm

Für das Bifurkationsdiagramm muss die Amplitude der Wechselspannung kontinuierlich verändert werden. Dafür wird der Funktionsgenerator mit Amplitudenmodulator verwendet und als Modulatorsignal eine Sägezahnspannung verwendet. Diese Modulatorspannung, die der Amplitude des Ausgangssignals entspricht, wird mit dem X-Eingang des Oszilloskops verbunden. Auf dem Y-Eingang wird Wahlweise V_d oder I dargestellt. Wie beim Poincare-Schnitt wird über die Delay-Stufe eine feste Phase der Wechselspannung eingestellt, während der der Oszilloskopstrahl eingeschaltet wird. Der Schaltplan in Abbildung 6 dargestellt.

Abbildung 7 zeigt das Ergebnis. Bei beiden Diagrammen sieht man eine Folge von Periodenverdopplungen für kleine Erregeramplituden. In der Mitte befindet sich ein chaotischer Bereich. Bei höheren Spannung findet man Intermittenz in Form einer Dreifachperiode, die schließlich wieder in Chaos übergeht.

6 Zusammenfassung

Bei der Untersuchung der ersten beiden Systeme konnten die charakteristischen Eigenschaften nichtlinearer Systeme gezeigt werden. Insbesondere wurde das Auftreten von Periodenverdopplungen, Chaos und Intermittenz gezeigt und der Informationsverlust über den Lyapunov-Exponenten gemessen. Die Universalität der Feigenbaumkonstante konnte für diese Systeme bis auf 12 Dezimalstellen bestätigt werden.

Für die beiden kontinuierlichen Systeme konnte durch die Anwendung des Euler-Verfahrens und der Poincare-Schnitte ein Verhalten erzielt werden, das in Analogie zu den diskreten Systemen steht. Insbesondere konnte der Phasenraum dieser mehrdimensionalen Systeme untersucht werden. Schließlich konnte für den realen nichtlinearen Schwingkreis das gleiche Verhalten nachgewiesen werden, das auch bei der Simulation am Computer aufgetreten ist.

Literatur

- [1] H.-O. Peitgen, H. Jürgens u. D. Saupe, Chaos - Bausteine der Ordnung, Rowohlt 1998
- [2] K.-H. Becker u. Michael Dörfler, Dynamische Systeme und Fraktale, Vieweg 1989
- [3] M. J. Feigenbaum, Quantitative universality for a class of nonlinear transformations, J. Stat. Phys. **19** (1978), 25 - 52



Abbildung 5: Poincare-Schnitt bei $V_s = 6,3V$

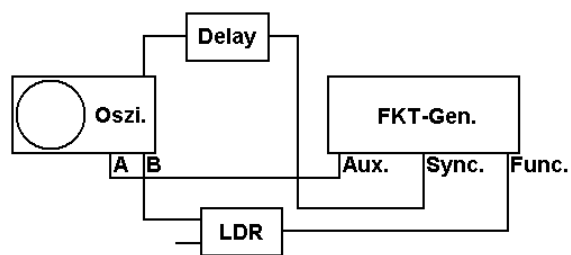


Abbildung 6: Schaltplan für Bifurkationsdiagramme

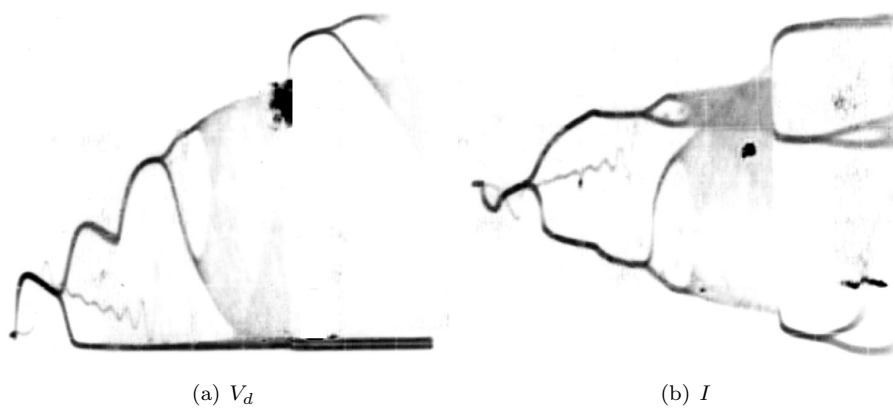


Abbildung 7: Bifurkationsdiagramme des realen Schwingkreises.