Das Schachtheorem

Manuel Hohmann
Fachbereich Physik der Universität Hamburg
mhohmann@physnet.uni-hamburg.de

19. Mai 2002

Vorwort

Schach ist seit dem sechsten Jahrhundert eines der beliebtesten Brettspiele der Menschheit. Wenn sich zwei Spieler auf dem Schachbrett mit ihren Armeen duellieren, beweisen sie damit ihr Können. Aber was ist das besondere am Schach? Was ist das Wesen dieses Spiels, das die Herausforderung ausmacht? Und vor allem: Kann man diese Herausforderung noch übertreffen?

Im Folgenden werden Sie dieser Erkenntnis etwas näher rücken.

Im ersten Teil werden Sie eine mathematische Theorie des Schachspiels kennen lernen. Sie werden die mathematischen Begründungen für Brett, Figuren und Züge erfahren.

Im zweiten Teil werden Sie herausfingen, auf welche anderen Arten man noch Schach spielen kann, ohne auf ein zweidimensionales Brett beschränkt zu sein. Neben endlichen und unendlichen, begrenzten und unbegrenzten Varianten werden Sie am Beispiel des Mehrparteienschach sehen, dass bestimmte Schachvarianten auch den Charakter von anspruchsvollen Gesellschaftsspielen haben können.

Der dritte Teil befasst sich mit Schachproblemen, also verschiedenen Aufgabenstellungen, die man auf einem Schachbrett erdenken kann. Dazu zählen Mattaufgaben ebenso wie das berühmte Damenproblem. Ausserdem werden verschiedene Strategien behandelt, die teilweise direkte Konsequenzen aus der Geometrie der einzelnen Bretter sind.

Das Schachtheorem richtet sich dabei an schachbegeisterte Mathematikfreunde und mathematikbegeisterte Schachfreunde. Für das Verständnis der Theorie werden Vorkenntnisse aus der Algebra empfohlen. Einige Schachvarianten verwenden Elemente aus der Zahlentheorie.

Aber auch ohne die Theorie in allen Details zu verstehen, lassen sich aus den gemachten Angaben Schachvarianten herleiten, die spannende Partien versprechen. Lassen Sie sich nicht von der Mathematik *schach-math* setzen, auch wenn Sie dafür einen Bauern opfern müssen!

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Mathematische Grundlagen

Kapitel 1

Das gerichtete Schachbrett

1.1 Nachbarfelder

Schach besteht als typisches Brettspiel aus zwei Komponenten: einem Brett und Figuren. Um ein Schachspiel mathematisch zu beschreiben ist eine mathematische Definition dieser Komponenten nötig. Daher soll zunächst das Brett definiert werden.

Ein Schachbrett ist - klassisch betrachtet - eine Ansammlung von Feldern, die sich in einer bestimmten Anordnung befinden. Dabei sind Felder zunächst einmal nichts weiter als die Elemente einer Menge $\mathcal{B}$. Die Geometrie dieser Menge wird dadurch ausgedrückt, dass sich ein Feld neben dem anderen befindet. Jedes Feld ist also umgeben von Nachbarfeldern. Wie viele dies maximal sein können, hängt von der Dimension n des Bretts ab, die sich direkt aus der Definition der Nachbarfelder ableiten lässt. Die Nachbarfelder kann man dadurch definieren, dass man eine Menge von binären Relationen auf $\mathcal{B}$ einführt. Diese sei wie folgt dargestellt:

$$\forall m \in \mathcal{I} = \{\underline{1}; \ldots ; \underline{n}\} :$$

$$\prec^m := \{(a, b) | a \text{ ist entlang Raumrichtung } m \text{ der linke Nachbar von } b\} \subset \mathcal{B}^2$$

Die erlaubten Raumrichtungen m sind die Elemente der Indexmenge $\mathcal{I}$. Die Dimension eines Schachbretts ist dann gegeben durch $\dim \mathcal{B} := |\mathcal{I}|$. Diese muss nicht notwendigerweise endlich sein.[1] Die einzelnen Raumrichtungen werden durch positive, ganze Zahlen dargestellt, die zur besseren Unterscheidung von gewöhnlichen Zahlen unterstrichen sind.

Analog führt man den rechten Nachbarn ein. Um später eine einfache Definition für Diagonalen zu erhalten, seien noch zwei weitere Schreibweisen für den gleichen Sachverhalt eingeführt, die mit der vorigen äquivalent sind:

$$a \prec^m b \Leftrightarrow b \succ^m a \Leftrightarrow a \succ^{-m} b \Leftrightarrow b \prec^{-m} a$$

Man beachte, dass sich beim Vorzeichenwechsel aller Indizes die Richtung der Relation umkehrt. Allgemein kann man die Indizes aus der Menge $\mathcal{I}^* := \mathcal{I} \cup \{-m | m \in \mathcal{I}\}$ wählen.

[1] Sie ist aber höchstens abzählbar, also $|\mathcal{I}| \leq \aleph_0$

Man definiert für die Raumrichtungen eine Orthogonalitätsrelation $\perp$ und eine Parallelitätsrelation $\parallel$ durch:

$$k \perp l \Leftrightarrow k \neq l \wedge k \neq -l; k \parallel l \Leftrightarrow k = l \vee k = -l$$

Letztere ist eine Äquivalenzrelation. Sie induziert eine Zerlegung der Menge $\mathcal{I}^*$ in Äquivalenzklassen $[k] := [k]_{\parallel} = \{k, -k\}$.

Diese Relation besitzt die Eigenschaft, dass jedes Element aus $\mathcal{B}$ höchstens einen linken und einen rechten Nachbarn für jede Raumrichtung besitzt.[2] Somit hat jedes Feld in einem n-dimensionalen Brett maximal $2n$ Nachbarn.

1.2 Diagonalen

Mit der Definition der unmittelbaren Nachbarn kann man nun die Diagonalen herleiten. Dies geschieht über die Relationenprodukte

$$\prec^{k,l} := (\prec^k \circ \prec^l) \cup (\prec^l \circ \prec^k), k \perp l$$

Analog wird die Relation $\succ^{k,l}$ definiert. Aus der Definition folgen einige Äquivalenzen:

$$a \prec^{k,l} b \Leftrightarrow b \succ^{k,l} a \Leftrightarrow a \succ^{-k,-l} b \Leftrightarrow b \prec^{-k,-l} a$$
$$\Leftrightarrow a \prec^{l,k} b \Leftrightarrow b \succ^{l,k} a \Leftrightarrow a \succ^{-l,-k} b \Leftrightarrow b \prec^{-l,-k} a$$

Die angegebenen Relationen bezeichnen Flächendiagonalen. Bei Brettern mit einer Dimension $n > 2$ treten weitere Diagonalen auf, die induktiv definiert werden. Sei $(x_i; i = 1, \ldots, m)$ eine Familie von paarweise orthogonalen Elementen aus einer geeigneten Indexmenge $\mathcal{I}^*$, so ist

$$\prec^{(x_i)} := \bigcup_{\sigma \in \gamma_m} \bigcirc_{k=1}^{m} (\prec^{x_{\sigma(k)}})$$

Dabei ist γ_m die symmetrische Gruppe von $\{1, \ldots, m\}$, also die Menge aller bijektiven Abbildungen $\sigma : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, m\}$. Die Elemente σ sind die Permutationen dieser Zahlen.

1.3 Entfernte Relationen

Alle bisher betrachteten Relationen beziehen sich nur auf Felder in der unmittelbaren Nachbarschaft. Man kann diese auf größere Distanzen erweitern, indem man $\prec^{k,k} := \prec^k \circ \prec^k$ definiert. Weitere Relationen dieses Typs werden induktiv definiert und folgen den genannten Schemata.

1.4 Algebraische Strukturen auf $\mathcal{I}^*$

Bei der Definition der Diagonalen fällt auf, dass diese offenbar kommutativ und assioziativ in den Raumrichtungen ist. Die ermöglicht es, eine Addition von Raumrichtungen zu definieren. Das Resultat ist eine Menge $\hat{\mathcal{I}}$ von Ausdrücken, die induktiv definiert werden:

[2]Dass nicht jedes Element zwei Nachbarn pro Raumrichtung besitzen muss, wird am klassischen Schach deutlich, da jedes Eckfeld nur zwei Nachbarn besitzt.

- $$\forall k \in \mathcal{I}^* : k \in \hat{\mathcal{I}}$$
- $$\forall k, l \in \hat{\mathcal{I}} : k + l \in \hat{\mathcal{I}}$$

Das neutrale Element sei mit $\underline{0}$ bezeichnet. Es gilt:

$$\forall x \in \mathcal{B} : x \succ^{\underline{0}} x; \forall k \in \hat{\mathcal{I}} : k + -k = \underline{0}$$

Damit ist offenbar auch das inverse Element definiert. Die Subtraktion kann man nun als Addition des Inversen definieren.

Die Eigenschaften der Addition erlauben es, die einzelnen Unterausdrücke aus $\mathcal{I}^*$ zu gruppieren. Man definiert nun das Produkt eines Richtungsausdrucks mit einer Zahl aus $\mathbb{N}^*$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \forall k \in \hat{\mathcal{I}} : n \cdot k := \sum_{i=1}^{n} k$$

Mit $0 \cdot k = \underline{0}$ und $-1 \cdot k = -k$ ist diese Definition erweiterbar, wodurch das Produkt nun für $\cdot : \mathbb{Z} \times \hat{\mathcal{I}} \to \hat{\mathcal{I}}$ definiert ist.[3]

Mit dieser Definition ist es möglich, entfernte Relationen und Diagonalen durch Nachbarschaftsrelationen bezüglich Richtungsausdrücken aus $\hat{\mathcal{I}}$ darzustellen.

[3] Es ist natürlich nicht $2 \cdot \underline{1} = \underline{2}$ oder $\underline{1} + \underline{2} = \underline{3}$.

Kapitel 2

Lineare Teilmengen

2.1 Definition

Es gibt geometrische Anordnungen von Feldern, die ein sinnvolles Schachbrett ergeben, aber nicht durch die Raumrichtungen und Nachbarschaftsrelationen dargestellt werden können, die bereits erläutert wurden. Man kann diese Bretter beschreiben, indem man lineare Teilmengen des Brettes definiert. Da diese Definition schwieriger in der Handhabung ist, wird sie in den folgenden Kapiteln nur dann benutzt, wenn es keine andere Möglichkeit gibt.

Eine lineare Teilmenge $L \subset \mathcal{B}$ ist eine endliche, nichtleere, angeordnete Menge. L heißt zyklisch, wenn es sich um eine zyklische Anordnung von Elementen handelt. L heißt primitiv, wenn es nur ein Element gibt. Primitive lineare Teilmengen sind nicht zyklisch.[1]

Jede lineare Teilmenge L besitzt eine Nachbarschaftsrelation, wie sie bereits definiert wurde. Diese sei im Folgenden mit $\succ_L$ bzw. $\prec_L$ bezeichnet. Zur besseren Unterscheidung von den globalen Nachbarschaftsrelationen, die für das gesamte Brett gelten, wird die zugehörige Menge als tiefgestellter Index dargestellt. Im Fall primitiver linearer Teilmengen ist diese Nachbarschaftsrelation die leere Relation. Natürlich gilt auch hier:

$$\forall a, b \in L : (a \succ_L b \Leftrightarrow b \prec_L a \Leftrightarrow b \succ_{-L} a \Leftrightarrow a \prec_{-L} b)$$

Dabei sind letztere nur andere Schreibweisen mit der gleichen Bedeutung.

Die Menge aller linearen Teilmengen eines Brettes bezeichnet man mit $\mathcal{L}$. Es gilt dabei $\mathcal{L} \subset \mathbb{P}(\mathcal{B})$. Um auf die Eigenschaften dieser Menge einzugehen, sind zunächst weitere Definitionen nötig.

2.2 Parallele lineare Teilmengen

Zwei lineare Teilmengen L_1, L_2 heißen parallel, wenn es eine Zerlegung $\mathcal{L}_k \subset \mathcal{L}$ von $\mathcal{B}$ gibt, in der sowohl L_1 als auch L_2 enthalten sind. Es gilt also:

$$\underbrace{\forall L_a, L_b \in \mathcal{L}_k : (L_a \neq L_b \Rightarrow L_a \cap L_b = \emptyset) \wedge \bigcup_{L \in \mathcal{L}_k} L = \mathcal{B}}_{\text{Eigenschaften einer Zerlegung}} \wedge L_1 \in \mathcal{L}_k \wedge L_2 \in \mathcal{L}_k$$

[1] Es macht dann natürlich auch keinen Sinn, von einer angeordneten Menge zu sprechen.

Man bezeichnet diese Eigenschaft durch $L_1 \parallel L_2$. Daraus folgt natürlich:

$$\forall L \in \mathcal{L} : L \parallel L$$

Folglich ist $\parallel$ reflexiv. Wie man leicht ablesen kann, ist $\parallel$ auch symmetrisch und transitiv. Es handelt sich also um eine Äquivalenzrelation.

Zwei parallele lineare Teilmengen L_1, L_2 heißen benachbart, wenn gilt:

$$\exists L \in \mathcal{L} : \exists a \in L \cap L_1, b \in L \cap L_2 : (a \succ_L b \vee a \prec_L b)$$

Man bezeichnet das System $\mathcal{L}_k$ als Richtungsmenge und $k \in \mathcal{I}$ als die zugehörige Raumrichtung. Für die Menge $\mathcal{L}$ gilt nun gemäß dem Zerlegungssatz bezüglich der Äquivalenzrelation $\parallel$:

$$\bigcup_{k \in \mathcal{I}} \mathcal{L}_k = \mathcal{L} \wedge \forall k, l \in \mathcal{I} : (k \neq l \Rightarrow \mathcal{L}_k \cap \mathcal{L}_l = \emptyset)$$

Es gibt also eine Zerlegung von $\mathcal{L}$, deren Elemente Zerlegungen von $\mathcal{B}$ sind.

Dieser Umstand ermöglicht es, eine vorläufige globale Nachbarschaftsrelation $\succ_k^*$ zu definieren. Für zwei Felder a, b gilt dann:

$$a \succ_k^* b \Leftrightarrow \exists L \in \mathcal{L}_k : (a \in L \wedge b \in L \wedge a \succ_L b)$$

Bei gerichteten Schachbrettern kann man die linearen Teilmengen konstruieren, indem man die Nachbarschaftsrelationen übernimmt:

$$a \succ_k^* b \Leftrightarrow a \succ^k b$$

Dies gilt jedoch nicht allgemein und wird spätestens bei der Definition der Diagonalen zu Problemen führen.

2.3 Diagonalen und entfernte Relationen

Im ersten Kapitel wurden Diagonalen und entfernte Relationen aus den Nachbarschaftsrelationen definiert. Das Resultat war kommutativ bezüglich der Raumrichtungen. Wenn es keine globalen Nachbarschaftsrelationen gibt, ist dies im allgemeinen nicht der Fall.

Man definiert eine Diagonale bzw. eine entfernte Relation $\succ_{L_1,L_2}$ zwischen den Elementen zweier linearer Teilmengen durch:

$$\forall a \in L_1, b \in L_2 : (a \succ_{L_1,L_2} b \Leftrightarrow \exists c \in L_1 \cap L_2 : (c \succ_{L_1} a \wedge b \succ_{L_2} c))$$

Analog definiert man:

$$\forall a \in L_1, b \in L_2 : (a \prec_{L_1,L_2} b \Leftrightarrow \exists c \in L_1 \cap L_2 : (c \prec_{L_1} a \wedge b \prec_{L_2} c))$$

$$\forall a \in L_1, b \in L_2 : (a \succ_{L_1,-L_2} b \Leftrightarrow \exists c \in L_1 \cap L_2 : (c \succ_{L_1} a \wedge b \prec_{L_2} c))$$

Im Fall $L_1 \nparallel L_2$ ist dies die Definition einer Diagonalen. Bei $L_1 \parallel L_2$ handelt es sich um die Definition einer entfernten Relation.[2]

Wie man aus der Definition ablesen kann, gilt:

$$\forall a \in L_1, b \in L_2 : (a \prec_{L_1,L_2} b \Leftrightarrow a \succ_{-L_1,-L_2} b \Leftrightarrow b \succ_{L_2,L_1} a \Leftrightarrow b \prec_{-L_2,-L_1} a)$$

Höherdimensionale Diagonalen werden induktiv definiert.

[2]Wenn die entfernte Relation wahr ist, gilt natürlich $L_1 = L_2$, da ansonsten $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ wäre.

2.4 Entfernte Diagonalen und Richtungswechsel

Es gibt in allgemeinen keine lineare Teilmenge $L_0 \in \mathcal{L}$ mit $a, b \in L_0$, wenn $L_1 \nparallel L_2$ und $a \succ_{L_1,L_2} b$ gilt. Da weiterhin die Diagonalrelation nicht kommutativ bezüglich der linearen Teilmengen ist, ist es auch schwieriger, entfernte Diagonalen zu konstruieren. Eine Möglichkeit besteht in der Einführung von direkten und indirekten Richtungswechseln.

Es seien L_1, L_2 zwei nichtprimitive, benachbarte, parallele lineare Teilmengen. Dann gibt es zwei nichtprimitive, benachbarte, parallele lineare Teilmengen L_a, L_b, für die gilt:

$$\exists a \in L_a \cap L_1, b \in L_a \cap L_2 : (a \succ_{L_a} b \vee a \prec_{L_a} b)$$

$$\exists a \in L_b \cap L_1, b \in L_b \cap L_2 : (a \succ_{L_b} b \vee a \prec_{L_b} b)$$

$$\exists a \in L_a \cap L_1, b \in L_b \cap L_1 : (a \succ_{L_1} b \vee a \prec_{L_1} b)$$

$$\exists a \in L_b \cap L_2, b \in L_b \cap L_2 : (a \succ_{L_2} b \vee a \prec_{L_2} b)$$

Wenn nun zwischen L_1 und L_2, nicht aber zwischen L_a und L_b ein (direkter) Richtungswechsel besteht (Schreibweise: $L_1 \leftrightarrows L_2$ bzw. $L_a \rightrightarrows L_b$), gilt:

$$\forall a \in L_1 \cap L_a, b \in L_2 \cap L_b : (a \succ_{L_1,L_b} b \Leftrightarrow a \succ_{L_a,-L_2})$$

Analog gilt:

$$L_1 \rightrightarrows L_2 \wedge L_a \leftrightarrows L_b \Rightarrow \forall a \in L_1 \cap L_a, b \in L_2 \cap L_b : (a \succ_{L_1,L_b} b \Leftrightarrow a \succ_{-L_a,L_2})$$

$$L_1 \leftrightarrows L_2 \wedge L_a \leftrightarrows L_b \Rightarrow \forall a \in L_1 \cap L_a, b \in L_2 \cap L_b : (a \succ_{L_1,L_b} b \Leftrightarrow a \succ_{-L_a,-L_2})$$

$$L_1 \rightrightarrows L_2 \wedge L_a \rightrightarrows L_b \Rightarrow \forall a \in L_1 \cap L_a, b \in L_2 \cap L_b : (a \succ_{L_1,L_b} b \Leftrightarrow a \succ_{L_a,L_2})$$

Das gleiche gilt natürlich auch für die im vorigen Abschnitt angegebenen abgeleiteten Relationen.

Es seien L_1, L_2, L_3 drei benachbarte parallele lineare Teilmengen,[3] wobei L_2 primitiv ist. Weiter gebe es eine Menge L, für die gilt:

$$\exists a \in L \cap L_1, b \in L \cap L_2 : (a \succ_L b \vee a \prec_L b)$$

und

$$\exists a \in L \cap L_2, b \in L \cap L_3 : (a \succ_L b \vee a \prec_L b)$$

Wenn zwischen L_1 und L_3 kein (indirekter) Richtungswechsel besteht, bildet die Relation $\succ_{L_1,L,L,L_3}$ eine Diagonale. Das gleiche gilt für die Relation $\succ_{-L_1,L,L,-L_3}$ und natürlich auch für $\succ_{L_1,-L,-L,L_3}$ und $\succ_{-L_1,-L,-L,-L_3}$. Wenn zwischen L_1 und L_3 ein indirekter Richtungswechsel besteht, bilden die Relationen $\succ_{L_1,L,L,-L_3}$, $\succ_{-L_1,L,L,L_3}$, $\succ_{L_1,-L,-L,-L_3}$ und $\succ_{-L_1,-L,-L,L_3}$ Diagonalen.

Offenbar hat ein gerichtetes Brett keine Richtungswechsel. Die Richtungswechsel sind auch der Grund, weshalb man keine globale Nachbarschaftsrelation definieren kann.

Zur allgemeinen Definition eines Schachbretts gehören also neben Feldern und linearen Teilmengen auch Richtungswechsel. Wenn diese drei Komponenten bekannt sind, ist das Schachbrett eindeutig.

[3]Das bedeutet,dass sowohl L_1 und L_2 als auch L_2 und L_3 benachbart sind.

Kapitel 3

Graphentheorie

Die Graphentheorie bietet eine mathematische Darstellungsweise für viele Gebiete aus Wissenschaft und Technik. Im Folgenden wird sich zeigen, dass auch das Schachspiel damit beschrieben werden kann.

3.1 Grundlagen

Ein Graph G besteht aus einer Menge V von Knoten und einer Menge E von Kanten. Eine Kante wird dabei repräsentiert durch ein (geordnetes oder ungeordnetes) Paar von Knoten, die als Endpunkte der Kante bezeichnet werden. Man spricht daher von gerichteten und ungerichteten Kanten. Ein Graph, der nur gerichtete Kanten enthält, wird gerichteter Graph genannt. Entsprechend heißt ein Graph, der nur ungerichtete Kanten enthält, ungerichteter Graph. Alle anderen Graphen werden gemischte Graphen genannt. Ein Paar von Knoten, das eine Kante repräsentiert, heißt benachbart oder adjazent. Knoten, die keine Nachbarknoten besitzen, heißen isolierte Knoten.

Kanten, die durch das gleiche (geordnete oder ungeordnete) Paar von Knoten repräsentiert werden, werden Mehrfachkanten genannt. Kanten, deren zwei Endpunkte identisch sind, heißen Schlingen. Ein Graph ohne Mehrfachkanten und Schlingen wird als schlichter Graph bezeichnet. Im Weiteren sollen nur schlichte Graphen betrachtet werden, da sich nur solche für die Beschreibung von Schachbrettern eignen. Bei schlichten Graphen ist die Zuordnung eines Knotenpaares zu einer Kante bijektiv. Jede Kante ist also durch Angabe ihrer Endpunkte eindeutig definiert.

Ein Graph heißt zusammenhängend, wenn je zwei Knoten durch eine Folge von Kanten verbunden sind.

Ordnet man jeder Kante eine reelle Zahl zu, so erhält man einen bewerteten Graphen. Diese relle Zahl wird als Wert dieser Kante bezeichnet. Im Folgenden werden die Werte von Kanten mit unterschiedlicher Bedeutung benutzt werden.

3.2 Der Nachbarschaftsgraph $G_n(\mathcal{B})$

Zur Beschreibung der Raumrichtungen eines Schachbretts wurden in einem früheren Kapitel Nachbarschaftsrelationen eingeführt. Dabei handelt es sich um

Mengen geordneter Paare von Felder, denen die jeweilige Raumrichtung zugeordnet ist. Es ist nun leicht, dieses Konzept mit dem der Graphentheorie zu verbinden. Die Felder des Brettes stellen die Knoten eines zusammenhängenden, gerichteten Graphen dar. Die Kanten kann man folgendermaßen aus den (lokalen oder globalen) Nachbarschaftsrelationen konstruieren, wobei $|e| = |(v_1, v_2)|$ den Wert der Kante $e = (v_1, v_2)$ mit den Endpunkten v_1, v_2 bezeichnet:

$$E_n = \bigcup_{k \in \mathcal{I}^*} \succ^k ; \forall (v_1, v_2) \in E_n : (|(v_1, v_2)| = k \Leftrightarrow v_1 \succ^k v_2)$$

Der so gebildete Graph wird als Nachbarschaftsgraph $G_n(\mathcal{B})$ eines Brettes $\mathcal{B}$ bezeichnet.[1]

Zur einfacheren Handhabung definiert man noch die Richtungsteilgraphen, die sich bei der Beschreibung von Bauernzügen als hilfreich erweisen werden. Man definiert:

$$(v_1, v_2) \in E_{n,k} \Leftrightarrow v_1 \succ^k v_2$$

Da alle Kanten des Richtungsteilgraphen die gleiche Bewertung erhielten, kann man diese auch einfach weglassen.

Die Richtungsteilgraphen haben weiterhin die Eigenschaft, dass sie in Untergraphen zerfallen, deren Knoten paarweise nicht benachbart sind. Bei den Knotenmengen dieser Untergraphen handelt es sich um lineare Teilmengen des Brettes, die ihrerseits die Richtungsmenge zu der Richtung des Richtungsteilgraphen darstellen.

Für die Beschreibung eines gerichteten Brettes ist der Nachbarschaftsgraph ausreichend. Man kann Diagonalen und entfernte Relationen wie bei den globalen Nachbarschaftsrelationen definieren. Um jedoch auch allgemeinere Bretter beschreiben zu können, wird ein zweiter Graph benötigt.

3.3 Der Richtungswechselgraph $G_w(\mathcal{B})$

Bei der Beschreibung eines Brettes durch lineare Teilmengen wurden Richtungswechsel eingeführt, um Diagonalen zu definieren. Man kann diese Definition durch Einführung eines ungerichteten, bewerteten Graphen G_w vereinfachen. Dieser beschreibt zunächst nur die Richtungswechsel zwischen einzelnen Feldern, die sich aber aus den Richtungswechseln zwischen linearen Teilmengen herleiten lassen. Diese Felder sind genau die Felder, die gemäß dem Nachbarschaftsgraphen benachbart sind. Es gilt:

$$\forall \{v_1, v_2\} \in E_w : (|\{v_1, v_2\}| = -1 \Leftrightarrow v_1 \leftrightarrows v_2); (|\{v_1, v_2\}| = 1 \Leftrightarrow v_1 \rightrightarrows v_2)$$

Ein solcher Richtungswechsel bedeutet, dass sich die Bedeutung aller Raumrichtungen bis auf die, entlang derer die beiden Knoten benachbart sind, umkehrt. Dies wird bei der Definition der Diagonalen ersichtlich.

Der Richtungswechselgraph hat die wichtige Eigenschaft, für jede Raumrichtung ein Potential zu besitzen, also wirbelfrei zu sein. Das bedeutet, dass nach dem Durchlaufen eines geschlossenen Kantenzuges alle Raumrichtungen wieder

[1] Durch die Benutzung von $k \in \mathcal{I}^*$ gilt $(v_1, v_2) \in E_n \Leftrightarrow (v_2, v_1) \in E_n$. Da es sich jedoch um gerichtete Kanten, also $(v_1, v_2) \neq (v_2, v_1)$ handelt, stellt dies keinen Widerspruch zur Behauptung dar, es handele sich um einen schlichten Graphen.

die gleiche Bedeutung besitzen wie vorher. Dieses Potential kann durch ein geordnetes Tupel $p(v) = (p_k(v), k \in \mathcal{I})$ dargestellt werden in Abhängigkeit des Feldes v. Dabei bestimmt man zunächst einen Startpunkt v_0, für den gilt:

$$\forall k \in \mathcal{I} : p_k(v_0) = 1$$

Die Wahl dieses Startpunktes ist willkürlich, da das Potential erst nach Wahl dieses Punktes eindeutig definiert ist.

Das Potential eines Punktes v_2, der zu einem Punkt v_1 mit bekanntem Potential benachbart ist, erhält man nun durch folgende Vorschrift:

$$\forall k \in \mathcal{I} : p_k(v_2) = \begin{cases} p_k(v_1) & \text{wenn } v_1 \succ^k v_2 \vee v_1 \prec^k v_2 \\ |\{v_1, v_2\}| \cdot p_k(v_1) & \text{sonst} \end{cases}$$

Entscheidend ist, dass das Potential eines beliebigen Feldes unabhängig vom Weg ist, auf dem diese Feld vom Startfeld aus erreicht wurde.

3.4 Diagonalen

Aus diesen Basisgraphen kann man weitere Graphen herleiten, die eine einfache Beschreibung von Zügen erlauben. Eine wichtige Grundlage dafür bilden Diagonalgraphen.

Zwei Felder v_1, v_2 sind entlang einer m-dimensionalen[2] Diagonalen benachbart, wenn es eine Menge $M \subset \mathcal{I}^*$ mit $|M| = m$ und $\forall k_1 \neq k_2 \in M : k_1 \perp k_2$ sowie eine Kantenfolge $(e_i \in E_n) = (v_{i,1}, v_{i,2})$ gibt, die die beiden Felder verbindet und für die gilt:

$$\forall k \in M : \exists! i : |(v_{i,1}, v_{i,2})| = k \cdot p_k(v_{i,1}) = k \cdot p_k(v_{i,2})$$

Die zweite Gleichheit ist immer erfüllt, wie aus der Definition des Potentials folgt. Dabei ist das Potential frei gewählt, aber fest.

Jede solche Menge M induziert somit nach Festlegung eines Potentials einen weiteren Graphen $G_{d,M}$, der als Diagonalgraph zur Menge M bezeichnet wird. Da die Kanten e_i und somit auch die Kantenfolge (e_i) gerichtet sind, ist auch dieser Graph gerichtet. Man kann daraus den Diagonalgraphen zur Dimension m erhalten, indem man seine Kantenmenge folgendermaßen definiert:

$$\forall 1 \leq m \leq |\mathcal{I}| : E_{d,m} = \bigcup_{M \subset \mathcal{I}^*, |M| = m} E_{d,M}$$

Dabei gilt offenbar $E_{d,1} = E_n$, also $G_{d,1} = G_n$.

3.5 Entfernte Diagonalen

Man kann die einfachen Nachbarschaftsrelationen wie eindimensionale Diagonalen beschreiben. Dies lässt sich auch auf die Definition entfernter Relationen und Diagonalen anwenden.

Der große Vorteil der Graphentheorie ist die Einfachheit dieser Definition. Dafür definiert man zunächst die Länge eines Kantenzuges. Diese ist einfach

[2] Auch $m = \infty$ ist zugelassen.

die Anzahl der Kanten. Als Entfernung zweier Felder bezüglich eines Graphen bezeichnet man dann die minimale Länge aller Kantenzüge des Graphen, die die beiden Felder miteinander verbinden. Wenn kein solcher Kantenzug existiert, ist die Entfernung der beiden Punkte ∞.

Bezeichnet man die Entfernung zweier Felder v_1, v_2 bezüglich eines Graphen G mit $\delta_G(v_1, v_2)$, so sind diese genau dann entlang einer m-dimensionalen Diagonalen benachbart, wenn eine Menge $M \subset \mathcal{I}^*$ mit $|M| = m$ existiert, die einen Graphen $G_{d,M}$ induziert, für den gilt:

$$\delta_{G_{d,M}}(v_1, v_2) < \infty$$

Dies kann man noch vereinfachen, wenn alle diese Graphen zum Diagonalgraphen zur Dimension m vereinigt werden:

$$\delta_{G_{d,m}}(v_1, v_2) < \infty$$

Dabei ist $\delta_{G_{d,m}}(v_1, v_2)$ der Abstand der Felder v_1, v_2 entlang einer m-dimensionalen Diagonalen.

Mit der Benutzung von Richtungsausdrücken aus $\hat{\mathcal{I}}$ erhält man folgende induktive Definition, die auf der induktiven Definition von $\hat{\mathcal{I}}$ basiert:

- $$\forall k \in \mathcal{I}^* : G_{d,k} := G_{d,\{k\}}$$

- $$\forall k, l \in \hat{\mathcal{I}} : \forall (v_1, v_2) \in \mathcal{B}^2 :$$
  $$(v_1, v_2) \in E_{d,k+l} \Leftrightarrow$$
  $$\exists v_3 \in \mathcal{B} : (((v_1, v_3) \in E_{d,k} \wedge (v_3, v_2) \in E_{d,l}) \vee ((v_1, v_3) \in E_{d,l} \wedge (v_3, v_2) \in E_{d,k}))$$

Aus der Graphentheorie folgt nun der einfache Satz:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \forall k \in \hat{\mathcal{I}} : \forall v_1, v_2 \in \mathcal{B} :$$

$$\delta_{G_{d,k}}(v_1, v_2) = n \Rightarrow \delta_{G_{d,n\cdot k}}(v_1, v_2) = 1 \Leftrightarrow (v_1, v_2) \in E_{d,n\cdot k}$$

Dabei ist $\Rightarrow$ statt $\Leftrightarrow$ erforderlich, weil bei zyklischen Untergraphen im ersten Fall eine Umrundung des Graphen erlaubt ist, während im zweiten Fall der kürzeste Weg zählt.

Kapitel 4

Figuren und Züge

Die in diesem Kapiten angegebenen Richtungen gelten bei gerichteten Brettern global. Anderenfalls kann man aber lokale Richtungen definieren, indem man die vorläufige globale Richtung k nur lokal auf die Menge $L \in \mathcal{L}_k$ bezieht, die das Feld beinhaltet, auf dem die betrachtete Figur steht.

Diagonalen werden wie beschrieben übertragen.

4.1 Die Figurenmenge $\mathcal{F}$

Damit sich zwei Gegner auf einem Brett duellieren können, benötigt jeder einen Satz von Figuren. Zu Beginn einer Partie befindet sich auf jeden Feld eine bestimmte Figur, wobei hier zur Menge der Figuren $\mathcal{F}$ auch das leere Feld $\mathbf{0}$ gezählt wird. Es sei weiter $\mathcal{F}^* := \mathcal{F} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Es werden folgende Abkürzungen benutzt:

Kürzel	Bedeutung
$\mathbf{0}$	leeres Feld
b	Bauer
K	König
D	Dame
S	Springer
T	Turm
L	Läufer ($\hat{=}\mathbf{L}^2$)
W	Wagen ($\hat{=}\mathbf{L}^3$)
G	Gewehrschütze ($\hat{=}\mathbf{L}^4$)
$\mathbf{b}^k$	Bauer in k-Richtung, $k \in \mathcal{I}^*$
$\mathbf{L}^k$	k-dimensionaler Läufer, $k \in \{2, \ldots, \lvert\mathcal{I}\rvert\}$

Tabelle 4.1: Schachfiguren

Jede Figur aus $\mathcal{F}^*$ trägt zusätzlich einen tiefgestellten Index, der angibt, um wessen Figur es sich handelt. Die Menge $\mathcal{G}$, der diese Indizes entstammen, ist die Gegnermenge. In der Regel ist $\mathcal{G} = \{\mathfrak{s}, \mathfrak{w}\}$ mit der Bedeutung schwarz oder weiß. Es kann sich aber auch um mehr Gegner handeln. Diese Tatsache erlaubt die Konstruktion von Teilmengen $\mathcal{F}_g, g \in \mathcal{G}$, die genau die Figuren eines Spielers

g enthält. Das Führt zum wichtigen Parteienaxiom:

$$\forall f \in \mathcal{F}^* : \exists! g \in \mathcal{G} : f \in \mathcal{F}_g$$

$$\Leftrightarrow \bigcup_{g \in \mathcal{G}} \mathcal{F}_g = \mathcal{F}^* \land \forall g_1, g_2 \in \mathcal{G}(g_1 \neq g_2 \Rightarrow \mathcal{F}_{g_1} \cap \mathcal{F}_{g_2} = \emptyset)$$

Dieses besagt, dass jede Figur aus $\mathcal{F}^*$ zu genau einem Spieler gehört. Natürlich hat jeder Spieler die gleichen Figurentypen, also:

$$\forall g_1, g_2 \in \mathcal{G} : \mathcal{F}_{g_1} \cong \mathcal{F}_{g_2}$$

Die Menge $\mathcal{G}$ ist zyklisch angeordnet. Jeder Spieler hat einen Vorgänger und einen Nachfolger.

Welche der Figuren in der Figurenmenge $\mathcal{F}$ enthalten sind und was sie bedeuten, hängt von der jeweiligen Variante ab. Es gibt jedoch einige Gemeinsamkeiten, die später in diesem Kapitel behandelt werden, da sie das Zugverhalten der Figuren betreffen.

4.2 Die Stellungsmenge $\mathcal{S}$

Um zu beschreiben, wo auf dem Brett welche Figuren positioniert sind, muss man ihre Stellung kennen. Mathematisch ist eine Stellung s eine Zuordnung $s : \mathcal{B} \to \mathcal{F}$, die jedem Feld die darauf befindliche Figur zuordnet. Die Menge $\mathcal{S}$ aller erlaubten Stellungen ist eine Teilmenge der Menge aller dieser Abbildung, deren Elemente einigen Axiomen genügen müssen. Das wichtigste ist das Existenzaxiom der Könige:

$$\forall s \in \mathcal{S} : \forall g \in \mathcal{G} : \exists! x \in \mathcal{B} : s(x) = \mathbf{K}_g$$

Dieses stellt sicher, dass sich auf dem Brett genau ein König für jeden Spieler befindet. Da die anderen Axiome entweder durch mögliche Züge aus der Startaufstellung bedingt sind oder nur für einzelne Bretter gültig sind, werden sie an entsprechender Stelle behandelt.

Ein wichtiger Bestandteil des Schachspiels ist die Startaufstellung $s_0 \in \mathcal{S}$. Dies ist die Stellung, in der sich die Figuren zu Beginn einer Partie befinden. Sie genügt zwei weiteren Axiomen:

- Gleichmächtigkeitsaxiom:

$$\forall g_1, g_2 \in \mathcal{G} : \forall f_1 \in \mathcal{F}_{g_1}, f_2 \in \mathcal{F}_{g_2} :$$

$$(f_1 \hat{=} f_2 \Rightarrow \{x \in \mathcal{B} | s_0(x) = f_1\} \cong \{x \in \mathcal{B} | s_0(x) = f_2\})$$

  Von jedem Figurentyp hat jeder Spieler zu Beginn die gleiche Anzahl.

- Erstes Figurenebenenaxiom:

$$\forall g \in \mathcal{G} : \exists! k(g) \in \mathcal{I} : \forall a, b \in \mathcal{B} :$$

$$\Big(\big(\{s_0(a), s_0(b)\} \subset \mathcal{F}_g \setminus \{\mathbf{b}_g\}\big) \Rightarrow \exists (l_j \in \mathcal{I}^* \setminus \{k(g), -k(g)\}) : a \succ^{(l_j)} b \Big)$$

  Es gibt genau eine Raumrichtung für jeden Spieler, entlang derer man sich nie bewegen muss, um von einer Figur im engeren Sinne dieses Spielers zu einer anderen Figur im engeren Sinne des gleichen Spielers zu gelangen.

- Zweites Figurenebenenaxiom: Es sei $k(g)$ die im ersten Figurenebenenaxiom spezifizierte Raumrichtung.

$$\forall a, b \in \mathcal{B} : \forall (l_j \in \mathcal{I}^* \setminus \{k(g), -k(g)\}) :$$

$$\Big(\Big(s_0(a) \in \mathcal{F}_g \setminus \{\mathbf{b}_g\} \wedge a \succ^{(l_j)} b\Big) \Rightarrow s_0(b) \in \mathcal{F}_g \setminus \{\mathbf{b}_g\}\Big)$$

  Wenn man sich ausgehend von einem Feld, das mit einer Figur im engeren Sinne eines bestimmten Spielers besetzt ist, nicht entlang der im ersten Figurenebenenaxiom spezifizierten Raumrichtung dieses Spielers bewegt, so erreicht man stets nur Felder, die wieder mit Figuren im engeren Sinne dieses Spielers besetzt sind.

- Erstes Bauernebenenaxiom: Es sei $k(g)$ die im ersten Figurenebenenaxiom spezifizierte Raumrichtung.

$$\forall a, b \in \mathcal{B} : \forall (k \in \{k(g), -k(g)\}) :$$

$$\big(\big(s_0(a) \in \mathcal{F}_g \setminus \{\mathbf{b}_g\} \wedge a \prec^k b\big) \Rightarrow s_0(b) = \mathbf{b}_g^k\big)$$

  Wenn man sich ausgehend von einem Feld, das mit einer Figur im engeren Sinne eines bestimmten Spielers besetzt ist, ein Feld entlang der im ersten Figurenebenenaxiom spezifizierten Raumrichtung dieses Spielers bewegt, so erreicht man stets ein Feld, das mit einem Bauern dieses Spielers besetzt ist, der in die gleiche Richtung geht.

- Zweites Bauernebenenaxiom:

$$\forall a, b \in \mathcal{B} : \forall k \in \mathcal{I}^* : \forall g \in \mathcal{G} :$$

$$\big(\big(s_0(a) = \mathbf{b}_g^k \wedge a \succ^k b\big) \Rightarrow s_0(b) \in \mathcal{F}_g \setminus \{\mathbf{b}_g\}\big)$$

  Wenn man sich ausgehend von einem Feld, das mit einem Bauern eines bestimmten Spielers besetzt ist, um ein Feld entgegen der Zugrichtung dieses Bauern bewegt, so erreicht man stets ein Feld, das mit einer Figur im engeren Sinne des gleichen Spielers besetzt ist. Diese ist gleich der im ersten Figurenebenenaxiom spezifizierten Raumrichtung, wie aus dem ersten Bauernebenenaxiom folgt.

- Bedrohungsfreiheitsaxiom: Die Figuren dürfen einander nicht bedrohen, also nicht in der Lage sein, einander aus der Startaufstellung heraus zu schlagen. Was darunter zu vertehen ist, wird im folgenden Abschnitt beschrieben.

4.3 Züge

Ein wesentlicher Aspekt des Schachspiels ist die Tatsache, dass Figuren über das Brett ziehen. Ein Zug wird dabei durch die Bewegung einer Figur aus $\mathcal{F}^*$ von einem Ausgangsfeld $a \in \mathcal{B}$ auf ein Zielfeld $b \in \mathcal{B}$ dargestellt. Damit kann man die Zugmenge $\mathcal{Z}$ einführen durch $(a, b) \in \mathcal{B}^2 \supset \mathcal{Z}$. Welche Züge jeweils erlaubt sind, hängt von der momentanen Stellung ab und davon, welcher Spieler am Zug ist. Zu jeder derartigen Kombination $(s \in \mathcal{S}, g \in \mathcal{G})$ existiert somit eine Menge von erlaubten Zügen $\mathcal{Z}(s,g) \subset \mathcal{B}^2$.[1] Theoretisch wären nach dieser Definition Züge erlaubt, die den Regeln des Schachspiels widersprechen, weil z.B. der König ins Schach gestellt würde. Die theoretisch denkbaren Züge werden zur Menge $\mathcal{Z}^*(s,g)$ zusammengefasst, während die Menge $\mathcal{Z}(s,g)$ dargestellt werden kann durch:

$$\mathcal{Z}(s,g) = \mathcal{Z}^*(s,g) \setminus \overline{\mathcal{Z}(s,g)}$$

Dabei ist $\overline{\mathcal{Z}(s,g)}$ die Menge der theoretisch denkbaren, verbotenen Züge.

Die Elemente dieser Mengen genügen den folgenden Axiomen:

- Besitzaxiom:
$$\forall (a,b) \in \mathcal{Z}^*(s,g) : s(a) \in \mathcal{F}_g$$
Jeder Spieler kann nur seine eigenen Figuren ziehen.
- Selbstschlagaxiom:
$$\forall (a,b) \in \mathcal{Z}^*(s,g) : s(b) \notin \mathcal{F}_g$$
Kein Spieler kann seine eigenen Figuren schlagen.
- Bewegungsaxiom:
$$\forall (a,b) \in \mathcal{Z}^*(s,g) : a \neq b$$
Keine Figur kann auf das Feld gezogen werden, von dem sie startet.[2]
- Bauernaxiome ($s(a) = \mathbf{b}_g$):
  - Erstes Zugaxiom:
  $$s(a) = \mathbf{b}_g^k \wedge b \succ^k a \wedge s(b) = \mathbf{0} \Rightarrow (a,b) \in \mathcal{Z}^*(s,g)$$
  Ein k-Bauer darf stets ein Feld in k-Richtung ziehen, sofern das Zielfeld frei ist.
  - Zweites Zugaxiom:
  $$s(a) = \mathbf{b}_g^k \wedge s_0(a) = s(a) \wedge \big(\exists c \in \mathcal{B} : c \succ^k a \wedge c \prec^k b \wedge s(c) = \mathbf{0}\big)$$
  $$\wedge s(b) = \mathbf{0} \Rightarrow (a,b) \in \mathcal{Z}^*(s,g)$$
  Ein k-Bauer darf aus der Startaufstellung zwei Felder in k-Richtung ziehen, sofern das Zielfeld und das übergangene Feld frei sind.

[1] Man kann die Zugmenge auch als Relation in $\mathcal{B}$ auffassen, die von den Parametern s und g abhängt. Statt $(a,b) \in \mathcal{Z}(s,g)$ kann man dann schreiben $a \rightarrow_{s,g} b$ mit der Bedeutung: *Die Figur von a kann nach b gezogen werden.* Das Gegenteil wird dann durch $a \nrightarrow_{s,g} b$ ausgedrückt.

[2] Dieses trivial erscheinende Axiom ist beim klassischen Schach eine direkte Konequenz der folgenden Axiome. Diese verbieten jedoch nicht, dass z.B. beim Zylinderschach ein Turm den Zylinder einfach umrundet. Aber auch hier ist ein solcher Zug unmöglich, da aus den beiden vorigen Axiomen mit $s(a) \in \mathcal{F}_g$ und $s(b) \notin \mathcal{F}_g$ ein Widerspruch folgt, wenn $a = b$ ist. Das Bewegungsaxiom sei hier dennoch angeführt, um der klassischen Vorstellung, die Figur werde zuerst von ihrem Startfeld genommen und danach auf das Zielfeld gezogen, gerecht zu werden. Korrekter ist jedoch die Bezeichnung Bewegungssatz.

– Schlagaxiom:

$$s(a) = \mathbf{b}_g^k \wedge \big(\exists l \in \mathcal{I}^* \setminus \{k, -k\} : b \succ^{k,l} a\big) \wedge s(b) \neq \mathbf{0} \Rightarrow (a, b) \in \mathcal{Z}^*(s, g)$$

Ein k-Bauer darf entlang einer Flächendiagonalen schlagen, wenn er dabei ein Feld in k-Richtung geht.[3]

- Springeraxiom:

$$s(a) = \mathbf{S}_g \wedge \big(\exists k, l \in \mathcal{I}^* : k \perp l \wedge b \succ^{2 \cdot k + l} a\big) \Rightarrow (a, b) \in \mathcal{Z}^*(s, g)$$

Der Springer zieht gemäß dem Rösselsprung zwei Felder entlang einer Raumrichtung und ein Feld entlang einer dazu orthogonalen Raumrichtung.

- Turmaxiom:

$$s(a) = \mathbf{T}_g \wedge \exists k \in \mathcal{I}^* : \exists m \in \mathbb{N} : \exists (c_i \in \mathcal{B}, i = 1, \ldots, m) :$$
$$\left((\forall i \in \{1, \ldots, m\} : s(c_i) = \mathbf{0}) \wedge b \succ^k c_m \wedge c_i \succ^k \begin{cases} a & \text{wenn } i = 1 \\ c_{i-1} & \text{sonst} \end{cases} \right)$$
$$\Rightarrow (a, b) \in \mathcal{Z}^*(s, g)$$

Der Turm darf beliebig viele Felder entlang einer beliebigen Raumrichtung aus $\mathcal{I}^*$ ziehen, sofern übersprungene Felder leer sind.

- Läuferaxiom:

$$s(a) = \mathbf{L}_g^k \wedge \exists (l_j \in \mathcal{I}^*, j = 1, \ldots, k) :$$
$$(\forall j_1, j_2 \in \{1, \ldots, k\} : j_1 \neq j_2 \Rightarrow l_{j_1} \perp l_{j_2})$$
$$\wedge \exists m \in \mathbb{N} : \exists (c_i \in \mathcal{B}, i = 1, \ldots, m) :$$
$$\left((\forall i \in \{1, \ldots, m\} : s(c_i) = \mathbf{0}) \wedge b \succ^{(l_j)} c_m \wedge c_i \succ^{(l_j)} \begin{cases} a & \text{wenn } i = 1 \\ c_{i-1} & \text{sonst} \end{cases} \right)$$
$$\Rightarrow (a, b) \in \mathcal{Z}^*(s, g)$$

Ein k-Läufer darf beliebig viele Felder entlang einer beliebigen k-dimensionalen Diagonalen ziehen, sofern übersprungene Felder leer sind.

- Damenaxiome:

  – Vereinigungsaxiom: Die Dame hat die Möglichkeit, sich wie ein Turm oder wie ein beliebiger Läufer zu bewegen.

  – Unendlichkeitsaxiom[4]:

$$s(a) = \mathbf{D}_g \wedge \exists (l_j \in \mathcal{I}^*, j \in \mathbb{N}) :$$
$$(\forall j_1, j_2 \in \{1, \ldots, k\} : j_1 \neq j_2 \Rightarrow l_{j_1} \perp l_{j_2})$$
$$\wedge \exists m \in \mathbb{N} : \exists (c_i \in \mathcal{B}, i = 1, \ldots, m) :$$

[3] Der Fall $s(b) \in \mathcal{F}_g$ ist bereits durch das Selbstschlagaxiom ausgeschlossen.

[4] Dieses Axiom entfällt für endlichdimensionale Bretter, da es dann nur eine endliche Zahl von Raumrichtungen gibt.

$$\left((\forall i \in \{1,\dots,m\} : s(c_i) = \mathbf{0}) \wedge b \succ^{(l_j)} c_m \wedge c_i \succ^{(l_j)} \begin{cases} a & \text{wenn } i = 1 \\ c_{i-1} & \text{sonst} \end{cases} \right)$$
$$\Rightarrow (a,b) \in \mathcal{Z}^*(s,g)$$

Die Dame hat die Möglichkeit sich beliebig viele Felder entlang einer Diagonalen zu bewegen, die durch unendlich viele paarweise orthogonale Raumrichtungen aufgespannt wird, sofern übersprungene Felder leer sind.

- Königsaxiom: Der König hat die Möglichkeit, sich genau wie die Dame zu bewegen, aber nur um ein Feld ($m = 0$). Er darf sich dabei nicht selbst ins Schach stellen.

- Schachaxiom (Die Bedeutung der Zugoperation $\odot$, die hier benutzt wird, wird in einem späteren Kapitel erläutert.): Es sei $(a,b) \odot (s,g) = (s',g')$.

$$\exists (a',b') \in \mathcal{Z}^*(s',g') : s'(b') = \mathbf{K}_g \Rightarrow (a,b) \in \overline{\mathcal{Z}(s,g)}$$

  Nach jedem Zug darf der König desjenigen, der diesen Zug ausgeführt hat, nicht geschlagen werden können (im Schach stehen).

- Ausschlussaxiom: Es gibt keine weiteren regulären Züge[5] als die in den übrigen Axiomen dargestellten.

4.4 Zuggraphen

Die Graphentheorie erlaubt es, alle regulären Züge durch einen gerichteten Graphen darzustellen. Dabei werden zunächst Zuggraphen für die einzelnen Figuren definiert und daraus der vollständige Zuggraph hergeleitet. Die einzelnen Figurenzuggraphen basieren ihrerseits auf den im vorigen Kapitel genannten Zugaxiomen, die hier in ihrer graphentheoretischen Form dargestellt sind, um eine einfachere Darstellung der Zuggraphen zu ermöglichen.

Zu jeder Figur $f \in \mathcal{F}_g$ auf einem Schachbrett existiert bei gegebener Stellung-Spieler-Kombination (s,g) ein Zuggraph $G_{z,f}(s,g)$. Die zugehörige Kantenmenge sei mit $E_{z,f}(s,g)$ bezeichnet. Die Knotenmenge ist gleich dem Schachbrett. Die Bedeutung von $G^*_{z,f}(s,g)$ und $E^*_{z,f}(s,g)$ ist analog zu $\mathcal{Z}^*(s,g)$ definiert. Damit lassen sich die Zuggraphen folgendermaßen aus den Zugaxiomen herleiten:

- Figurenaxiom (ersetzt das Besitzaxiom; dieses erhält man bei der Konstruktion des gesamten Zuggraphen $G_z(s,g)$):

$$\forall f \in \mathcal{F}_g : \forall v_1, v_2 \in \mathcal{B} : s(v_1) \neq f \Rightarrow (v_1,v_2) \notin E^*_{z,f}(s,g)$$

  Jedem Figurenzuggraphen gehören nur Züge der entsprechenden Figuren an. Es gilt dann analog zum Besitzaxiom:

$$\forall v_1, v_2 \in \mathcal{B} : s(v_1) \notin \mathcal{F}_g \Rightarrow (v_1,v_2) \notin E^*_z(s,g)$$

[5]Regulär sind dabei Züge, die sich gemäß der im folgenden Kapitel beschriebenen Zugoperation $\odot$ darstellen lassen. Als irreguläre Züge existieren das en-passant-Schlagen und die Rochade, die gesondert beschrieben werden.

- Selbstschlagaxiom:
$$\forall (v_1, v_2) \in E_z^*(s,g) : s(v_2) \notin \mathcal{F}_g$$
- Bewegungsaxiom:
$$\forall (v_1, v_2) \in E_z^*(s,g) : v_1 \neq v_2$$
- Bauernaxiome:
  - Erstes Zugaxiom:
$$\forall v_1, v_2 \in \mathcal{B} : s(v_1) = \mathbf{b}_g^k \wedge \delta_{G_{d,k}}(v_1, v_2) = 1 \wedge s(v_2) = \mathbf{0}$$
$$\Rightarrow (v_1, v_2) \in E_{z,\mathbf{b}^k}^*(s,g)$$
  - Zweites Zugaxiom (induktive Definition):
$$\forall v_1, v_2 \in \mathcal{B} : s(v_1) = \mathbf{b}_g^k \wedge s_0(v_1) = \mathbf{b}_g^k$$
$$(\exists (v_1, v_3) \in E_{z,\mathbf{b}^k}^*(s,g) : \delta_{G_{d,\{k\}}}(v_1, v_3) = 1 \wedge \delta_{G_{d,k}}(v_3, v_2) = 1) \wedge s(v_2) = \mathbf{0}$$
$$\Rightarrow (v_1, v_2) \in E_{z,\mathbf{b}^k}^*(s,g)$$
    Wenn ein Bauer ein Feld vorrücken kann und das folgende Feld ebenfalls frei ist, so kann er auch zwei Felder vorrücken, sofern er von der Startaufstellung ausgeht.
  - Schlagaxiom:
$$\forall v_1, v_2 \in \mathcal{B} : s(v_1) = \mathbf{b}_g^k \wedge \big(\exists l \in \mathcal{I}^* \setminus \{k, -k\} : \delta_{G_{d,k+l}}(v_1, v_2) = 1\big) \wedge s(v_2) \neq \mathbf{0}$$
$$\Rightarrow (v_1, v_2) \in E_{z,\mathbf{b}^k}^*(s,g)$$
- Springeraxiom:
$$\forall v_1, v_2 \in \mathcal{B} : s(v_1) = \mathbf{S}_g \wedge \big(\exists k, l \in \mathcal{I}^* : k \perp l \wedge \delta_{G_{d,2*k+l}}(v_1, v_2) = 1\big)$$
$$\Rightarrow (v_1, v_2) \in E_{z,\mathbf{S}}^*(s,g)$$
- Turmaxiom (induktive Definition): Man definiert zunächst richtungsabhängige Untergraphen $G_{z,\mathbf{T},k}^*(s,g), k \in \mathcal{I}^*$:
  -
$$\forall v_1, v_2 \in \mathcal{B} : s(v_1) = \mathbf{T}_g \wedge \exists k \in \mathcal{I}^* : \delta_{G_{d,k}}(v_1, v_2) = 1$$
$$\Rightarrow (v_1, v_2) \in E_{z,\mathbf{T},k}^*(s,g)$$
    Ein Turm darf stets ein Feld entlang einer beliebigen Raumrichtung $k \in \mathcal{I}^*$ ziehen.
  -
$$\forall v_1, v_2 \in \mathcal{B} : s(v_1) = \mathbf{T}_g \wedge \exists k \in \mathcal{I}^* : \exists v_3 \in \mathcal{B} :$$
$$(v_1, v_3) \in E_{z,\mathbf{T},k}^*(s,g) \wedge \delta_{G_{d,k}}(v_3, v_2) = 1 \wedge s(v_3) = \mathbf{0}$$
$$\Rightarrow (v_1, v_2) \in E_{z,\mathbf{T},k}^*(s,g)$$
    Ein Turm, der entlang einer Raumrichtung $k \in \mathcal{I}^*$ auf ein leeres Feld ziehen kann, kann auch ein Feld weiter ziehen.

Nun gilt:

$$G^*_{z,\mathbf{T}}(s,g) = \bigcup_{k\in\mathcal{I}^*} G^*_{z,\mathbf{T},k}(s,g)$$

- Läuferaxiom (analog zum Turmaxiom): Man definiert auch hier Untergraphen

$$G^*_{z,\mathbf{L}^k,M}(s,g), M \subset \mathcal{I}^* \wedge |M| = k \wedge \forall l_1 \neq l_2 \in M : l_1 \perp l_2$$

  –
$$\forall v_1, v_2 \in \mathcal{B} : s(v_1) = \mathbf{L}^k_g \wedge \exists M : \delta_{G_{d,M}}(v_1, v_2) = 1$$
$$\Rightarrow (v_1, v_2) \in E^*_{z,\mathbf{L}^k,M}(s,g)$$

  Ein k-dimensionaler Läufer darf stets ein Feld entlang einer k-dimensionalen Diagonalen ziehen.

  –
$$\forall v_1, v_2 \in \mathcal{B} : s(v_1) = \mathbf{L}^k_g \wedge \exists M : \exists v_3 \in \mathcal{B} :$$
$$(v_1, v_3) \in E^*_{z,\mathbf{L}^k,M}(s,g) \wedge \delta_{G_{d,M}}(v_3, v_2) = 1 \wedge s(v_3) = \mathbf{0}$$
$$\Rightarrow (v_1, v_2) \in E^*_{z,\mathbf{L}^k,M}(s,g)$$

  Ein k-dimensionaler Läufer, der entlang einer k-dimensionalen Diagonalen auf ein leeres Feld ziehen kann, kann auch ein Feld weiter ziehen.

Nun gilt:

$$G^*_{z,\mathbf{L}^k}(s,g) = \bigcup_M G^*_{z,\mathbf{L}^k,M}(s,g)$$

- Damenaxiome: Das Vereinigungsaxiom kann mit dem Unendlichkeitsaxiom zusammengeführt werden:

$$G^*_{z,\mathbf{D},M}(s,g), M \subset \mathcal{I}^* \wedge M \neq \emptyset \wedge \forall l_1 \neq l_2 \in M : l_1 \perp l_2$$

  –
$$\forall v_1, v_2 \in \mathcal{B} : s(v_1) = \mathbf{D}_g \wedge \exists M : \delta_{G_{d,M}}(v_1, v_2) = 1$$
$$\Rightarrow (v_1, v_2) \in E^*_{z,\mathbf{D},M}(s,g)$$

  Eine Dame darf stets ein Feld ziehen.

  –
$$\forall v_1, v_2 \in \mathcal{B} : s(v_1) = \mathbf{D}_g \wedge \exists M : \exists v_3 \in \mathcal{B} :$$
$$(v_1, v_3) \in E^*_{z,\mathbf{D},M}(s,g) \wedge \delta_{G_{d,M}}(v_3, v_2) = 1 \wedge s(v_3) = \mathbf{0}$$
$$\Rightarrow (v_1, v_2) \in E^*_{z,\mathbf{D},M}(s,g)$$

  Eine Dame, die auf ein leeres Feld ziehen kann, kann auch ein Feld weiter ziehen.

Nun gilt:

$$G^*_{z,\mathbf{D}}(s,g) = \bigcup_M G^*_{z,\mathbf{D},M}(s,g)$$

- Königsaxiom: Dieses wird aus dem Damenaxiom definiert:

$$\forall v_1, v_2 \in \mathcal{B} : s(v_1) = \mathbf{K}_g \wedge$$

$$\exists M \subset \mathcal{I}^* : M \neq \emptyset \wedge \forall l_1 \neq l_2 \in M : l_1 \perp l_2 \delta_{G_{d,M}}(v_1, v_2) = 1$$

$$\Rightarrow (v_1, v_2) \in E^*_{z,\mathbf{K}}(s, g)$$

- Das Schachaxiom und das Ausschlussaxiom werden analog übernommen.

Der Zuggraph wird nun definiert durch:

$$G_z(s, g) = \bigcup_{f \in \mathcal{F}_g} G_{z,f}(s, g)$$

Wegen der Äquivalenz dieser Darstellung mit der vorigen gilt natürlich $E_z(s, g) = \mathcal{Z}(s, g)$.

4.5 Die Zugoperation $\odot$

Wenn eine Figur aus einer bestimmten Stellung $s \in \mathcal{S}$ durch einen bestimmten Zug $(a, b) \in \mathcal{Z}(s, g)$ bewegt wird, erhält man anschließend eine neue Stellung $s' \in \mathcal{S}$. Dies entspricht einer Verknüpfung $\odot : \mathcal{Z} \times \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, die wie folgt definiert ist[6]:

$$(a, b) \odot s = s'; s'(x) := \begin{cases} \mathbf{0} & \text{wenn } x = a \\ s(a) & \text{wenn } x = b \\ s(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Figur, die sich auf dem Ausgangsfeld befand, ist nun auf dem Zielfeld. Das Ausgangsfeld ist leer. Alle anderen Felder sind unverändert. Mit dem Bewegungsaxiom folgt $s' \neq s$.

Weiterhin hat sich der Spieler gewechselt, der nun am Zug ist. Der neue Spieler ist der Nachfolger des vorigen, also $g' \succ g$. Man kann daher die Zugoperation auch auf eine Kombination Stellung und Spieler anwenden und erhält dann $(a, b) \odot (s, g) = (s', g')$.

4.6 Rochaden

Ausser den bisher beschriebenen Zügen kann ein Spieler auf einem zweidimensionalen Brett auch eine Rochade durchführen. Bei höherdimensionalen Brettern ist es nicht zwangsläufig möglich, eine Rochade sinnvoll zu definieren. Unter einer Rochade versteht man dann einen Zug, bei dem ein Turm (gemäß dem Turmaxiom) neben den König gezogen und der König auf die andere Seite des Turms gestellt wird. Mathematisch ausgedrückt zieht der Turm in k-Richtung von a nach b, wobei $\exists c \in \mathcal{B} : c \succ^k b \wedge s(c) = \mathbf{K}_g$. Anschließend bewegt sich

[6] Tatsächlich kann und muss man diese Operation für $\mathcal{Z}^* \times \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ definieren, um das Schachaxiom darstellen zu können.

der König von c nach d mit $d \prec^k b$. Insgesamt ergibt die Rochade mit diesen Bezeichnungen die Bilanz

$$s'(x) := \begin{cases} \mathbf{0} & \text{wenn } x = a \vee x = c \\ s(a) = \mathbf{T}_g & \text{wenn } x = b \\ s(c) = \mathbf{K}_g & \text{wenn } x = d \\ s(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit eine Rochade durchgeführt werden kann, müssen zwei weitere Bedingungen erfüllt sein: Weder der König noch der betreffende Turm dürfen bereits gezogen worden sein. Ausserdem darf der König nicht im Schach stehen. Auch das Feld, das der König überquert, darf nicht bedroht sein.[7]

4.7 en-passant-Schlagen

Die Möglichkeit, einen Bauern vom Startfeld aus um zwei Felder ziehen zu können, wurde ursprünglich eingeführt, um die Entwicklung der Figuren in der Eröffnung zu beschleunigen. Der Bauer überspringt dabei allerdings ein leeres Feld, das er im Normalfall hätte passieren müssen. Somit entginge einem gegnerischen Bauern die Gelegenheit, diesen Bauern dort zu schlagen, weil er einfach vorbeizieht. Daher wurde die Möglichkeit des en-passant-Schlagens (im Vorübergehen) eingeführt. Wenn ein Bauer einen solchen Doppelzug macht, kann ihn ein gegnerischen Bauer schlagen, als ob er nur ein Feld gezogen hätte. Der Bauer wird entfernt, der gegnerische Bauer zieht auf das Feld, das der Bauer bei einem Einfachzug besetzt hätte. Dies ist aber nur unmittelbar nach dem Doppelzug des Bauern möglich.

4.8 Bauernumwandlung

Ein Bauer, der ein Feld erreicht, das in der Startaufstellung mit einer gegnerischen Figur im engeren Sinne[8] besetzt ist, wird in eine Figur im engeren Sinne ausser dem König umgewandelt. Mit $(a, b) \odot (s, g) = (s', g')$ lautet dies:

$$s(a) = \mathbf{b}_g \wedge s_0(b) \in \mathcal{F}_{g''} \setminus \{\mathbf{b}_{g''}\} \Rightarrow s'(b) \in \mathcal{F}_g \setminus \{\mathbf{b}_g, \mathbf{K}_g\}$$

Für $|\mathcal{G}| = 2$ ist natürlich wegen $g \neq g' \wedge g \neq g''$ stets $g' = g''$. Das ist aber nicht zwangsläufig der Fall, wenn es mehr als zwei Spieler gibt.

4.9 Die Erzeugbarkeitsrelationen $\triangleright$ und $\triangleleft$

Oft stellt sich die Frage, ob eine bestimmte Stellung-Spieler-Kombination aus einer anderen hervorgehen kann. Dies wird durch die Erzeugbarkeitsrelationen ausgedrückt. Man definiert:

$$(s, g) \triangleright (s', g') \Leftrightarrow \exists z \in \mathcal{Z}(s, g) : z \odot (s, g) = (s', g')$$

[7]Natürlich darf auch das Feld, auf das der König zieht, nicht bedroht sein.
[8]Das sind die Figuren der Menge $\mathcal{F}^* \setminus \{\mathbf{b}\}$

Analog definiert man die Umkehr:

$$(s,g) \lhd (s',g') \Leftrightarrow (s',g') \rhd (s,g)$$

Diese Relationen werden bei der Konstruktion von Mattführungen von Bedeutung sein.

Kapitel 5

Ende der Partie

5.1 Matt

Ein Spieler ist Matt, wenn er seinen König nicht mehr davor bewahren kann, im nächsten Zug geschlagen zu werden, und sich im Schach befindet. Es gilt also für eine Mattstellung s_m (mit $g' \succ g$):

$$\mathcal{Z}(s_m, g) = \emptyset \land \exists (a, b) \in \mathcal{Z}(s_m, g') : s_m(b) = \mathbf{K}_g$$

Das bedeutet, dass er die Partie verloren hat. Bei Turnieren, bei denen die einzelnen Partien mit Punkten bewertet werden, ist die Wertung 1:0 für den Sieger. Wenn ein Spieler feststellt, dass er ein Matt innerhalb der nächsten Züge nicht mehr abwenden kann (z.B. weil sein König durch ständige Schachgebote über das Brett gejagt wird, bis er in der Falle ist), kann er auch sofort aufgeben. Das Ergebnis ist das gleiche.

5.2 Patt

Zu einem Patt kommt es, wenn der Spieler, der am Zug ist, keinen Zug ausführen kann. Dies ist z.B. dann der Fall, wenn nur nach der König auf dem Brett ist und alle umliegenden Felder[1] bedroht sind. Damit gilt für eine Pattstellung s_p (mit $g' \succ g$):

$$\mathcal{Z}(s_p, g) = \emptyset \land \forall (a, b) \in \mathcal{Z}(s_p, g') : s_p(b) \neq \mathbf{K}_g$$

Ein Patt stellt für keinen der Spieler einen Sieg dar. Somit ist auch die Punktwertung 0,5:0,5. Das Patt ist ein besonders interessanter Fall eines Remis.

5.3 Remis

Ein Remis ist eine Situation, in der keiner der Spieler innerhalb absehbarer Zeit ein Matt erreichen kann. Es gibt mehrere Möglichkeiten, eine Partie durch Remis zu beenden. Am einfachsten ist die einvernehmliche Lösung. Der Spieler, der am Zug ist, bietet seinem Gegner unmittelbar vor seinem Zug das Remis

[1] Das Feld auf dem der König steht darf aber nicht bedroht sein, sonst wäre es matt.

an. Wenn dieser annimmt, ist die Partie mit Remis beendet. Ansonsten wird sie fortgesetzt. Eine weitere Möglichkeit ist die dreimalige Stellungswiederholung. Wenn ein Spieler die gleiche Stellung zum dritten Mal herbeiführen kann, so kann er Remis verlangen, bevor er den Zug ausführt. Schließlich gibt es noch die 50-Züge-Regel. Wenn ein Spieler nachweisen kann, dass 50 Züge ausgeführt wurden, ohne dass eine Figur geschlagen oder ein Bauer gezogen wurde,[2] so kann er Remis beanspruchen. Diese Regel hat den Sinn, endlose Partien ohne signifikante Änderung der Stellung zu vermeiden.

Alle Fälle eines Remis werden mit 0,5:0,5 bewertet.

5.4 Erzwingbarkeit eines Matt

Es sei $\mathcal{S}_m(g)$ die Menge aller Mattstellungen des Spielers g, also die Menge aller Stellungen, in denen g nach der obigen Definition mattgesetzt ist. Man kann nun eine induktiv Menge von Stellungen konstruieren, aus denen das Matt immer erzwungen werden kann bzw. in denen das Matt unvermeidbar ist. Letztere haben die Eigenschaft, dass der mattgesetzte Spieler am Zug ist, während dies bei ersteren nicht der Fall ist. Die erste der beiden Mengen sei mit $\mathcal{S}^*_m(g)$ bezeichnet, letztere mit $\mathcal{S}'_m(g)$. Dabei sei zunächst von zwei Spielern ausgegangen, es gilt also $|\mathcal{G}| = 2$ und $g \succ g' \Leftrightarrow g' \succ g$. Dies ist gerechtfertigt, da bei Mehrpersonen-Varianten das Matt konventional definiert wird. Man konstruiert nun:

$$\forall s \in \mathcal{S}_m(g) : s \in \mathcal{S}'_m(g)$$
$$\forall s' \in \mathcal{S} : (\exists s \in \mathcal{S}'_m(g) : s' \triangleright s) \Rightarrow s' \in \mathcal{S}^*_m(g)$$
$$\forall s \in \mathcal{S} : (\forall s' \in \mathcal{S} : (s \triangleright s' \Rightarrow s' \in \mathcal{S}^*_m(g)) \Rightarrow s \in \mathcal{S}'_m(g)$$

Zur Abkürzung definiert man $\hat{\mathcal{S}}_m(g) = \mathcal{S}^*_m(g) \cup \mathcal{S}'_m(g)$. Diese Definition erlaubt die Formulierung eines weiteren Axioms, das die Startaufstellung betrifft. Es handelt sich um das Mattfreiheitsaxiom:

$$\forall g \in \mathcal{G} : s_0 \notin \hat{\mathcal{S}}_m(g)$$

Aus der Startaufstellung heraus kann kein Spieler das Matt erzwingen oder zwingend mattgesetzt werden. Es sei darauf hingewiesen, dass bei keiner der hier angegebenen Schachvarianten erwiesen ist, ob dieses Axiom überhaupt erfüllt ist. Nicht einmal beim klassischen Schach existiert ein Beweis dafür.

[2] Das Schlagen einer Figur bedeutet ebenso wie das Ziehen eines Bauern, der bekanntermaßen nur in eine Richtung ziehen kann, eine signifikante Änderung der Stellung.

Kapitel 6

Notation

6.1 Ausfürliche (lange) Notation

Bei der langen Notation wird jeder Zug durch Angabe der gezogenen Figur, deren Startfeld und deren Zielfeld angegeben. Nur der Bauer wird nicht gekennzeichnet. Es bedeuten:

Brett	Zug	Bedeutung
klassisches Schach	**L**f1-c4	Läufer zieht von f1 nach c4
Torusschach	e13-e11	Bauer zieht von e13 nach e11
6D-Diamantschach	$\mathbf{L}^4(3,3,3,3,3,3) - (3,4,4,4,4,3)$	vierdimensionaler Läufer zieht von $(3,3,3,3,3,3)$ nach $(3,4,4,4,4,3)$
Intervallschach	$\mathbf{T}\frac{1}{6} - \frac{2}{3}$	Turm zieht von $\frac{1}{6}$ nach $\frac{2}{3}$

Tabelle 6.1: Züge in der langen Notation

Wenn dabei eine gegnerische Figur geschlagen wird, wird der Bindestrich durch ein Kreuz ($\times$) ersetzt. Ein paar Beispiele sind in der Tabelle angegeben.

Brett	Zug	Bedeutung
klassisches Schach	**L**f1×c4	Läufer schlägt von f1 nach c4
Torusschach	e10×d9	Bauer schlägt von e10 nach d9
6D-Diamantschach	$\mathbf{L}^4(3,3,3,3,3,3) \times (3,4,4,4,4,3)$	vierdimensionaler Läufer schlägt von $(3,3,3,3,3,3)$ nach $(3,4,4,4,4,3)$
Intervallschach	$\mathbf{T}\frac{1}{6} \times \frac{2}{3}$	Turm schlägt von $\frac{1}{6}$ nach $\frac{2}{3}$

Tabelle 6.2: Schläge in der langen Notation

Eine besondere Schreibweise wird für Rochaden benutzt: Auf zweidimensionalen Brettern bilden die Figuren eines Spielers in der Startaufstellung eine lineare Teilmenge. Diese besitzt eine lokale Nachbarschaftsrelation. Es sind maximal zwei Rochaden möglich. Da diese beim klassischen Schach unterschiedliche Länge besitzen, werden sie als kurze Rochade (der König bewegt sich nach rechts, Symbol 0-0) und lange Rochade (der König bewegt sich nach links, Symbol 0-0-0) bezeichnet. Man kann diese Symbole übernehmen und allgemein durch die Richtung definieren, in die sich der König bewegt, also rechts oder links. Die Länge zweier Rochaden kann nämlich auch gleich sein, wenn z.B. beim Zylinderschach nur noch der Turm a1 und der König die Grundreihe besetzen. Bei höherdimensionalen Brettern gibt man die lokale Raumrichtung, entlang derer rochiert wurde, durch einen Index an. So ist $0 - 0_{\underline{2}}$ die rechtsseitige Rochade entlang der zweiten Raumrichtung.

Eine weitere Besonderheit ist das en-passant-Schlagen. Dieses wird durch ein nachgestelltes e.p. gekennzeichnet.[1] So ist beim klassischen Schach folgendes denkbar: 1. c2-c4; b4×c3 e.p.

Wenn bei einem Zug einem Gegner Schach geboten wird, also sein König angegriffen ist, wird die durch ein nachgestelltes Plus (+) dargestellt. Wenn dem König gleich zwei Figuren Schach bieten (Doppelschach), werden zwei Pluszeichen nachgestellt. Wenn der Gegner matt ist, kennzeichnet dies ein nachgestelltes Doppelplus ($\ddagger$).

Alle Notationsregeln sind in der Tabelle zusammengefasst.

Zug	Bedeutung
Figur Feld1-Feld2	Figur zieht von Feld1 nach Feld2
Feld1-Feld2	Bauer zieht von Feld1 nach Feld2
Figur Feld1×Feld2	Figur schlägt von Feld1 nach Feld2
Feld1×Feld2	Bauer schlägt von Feld1 nach Feld2
Feld1×Feld2 e.p.	Bauer schlägt von Feld1 nach Feld2 en passant
0-0	rechtsseitige (kurze) Rochade
0-0-0	linksseitige (lange) Rochade
Figur Feld1-Feld2+	Figur zieht von Feld1 nach Feld2 und bietet schach
Figur Feld1-Feld$\ddagger$	Figur zieht von Feld1 nach Feld2 und setzt matt

Tabelle 6.3: Lange Notation

6.2 Kurze Notation

Die kurze Notation verzichtet im Allgemeinen auf die Angabe des Startfelds. Dieses wird nur angegeben, wenn es mehrere Figuren gibt, die das gleiche Zielfeld erreichen können. Bei Bauernschlägen wird selbst die Koordinate entlang ihrer Laufrichtung nur dann angegeben, wenn sie nicht eindeutig ist. In der Tabelle sind diese Regeln am Beispiel des Zylinderschach verdeutlicht.

Rochaden werden analog zur langen Notation bezeichnet. Auch die Kennzeichnung von Schach und Matt erfolgt analog.

Neben diesen beiden Notationen werden auch viele Mischformen benutzt.

[1] Man findet auch die Abkürzung i.V. mit der gleichen Bedeutung.

Zug	Bedeutung
Sf3	Springer zieht nach f3
e4	Bauer zieht nach e4
L×g5	Läufer schlägt nach g5
ah	Bauer schlägt von a nach h
bc e.p.	Bauer schlägt von b nach c en passant
Tae8	Turm zieht von a8 nach e8

Tabelle 6.4: Kurze Notation

6.3 Zugfolgen

Zunächst werden die Züge durchnummeriert. Der erste Zug ist jeweils der Zug des Spielers, der die Partie beginnt (im klassischen Fall Weiß). Geht man von einer Stellung aus, in der ein anderer Spieler am Zug ist, so sind Auslassungspunkte (…) einzufügen. So wird z.B. eine typische Eröffnung beim klassischen Schach dargestellt durch (lange Notation): 1. e2-e4, e7-e5; 2. **S**g1-f3, **S**b8-c6; Setzt Schwarz in einem Zug matt, so wird dies dargestellt durch 1. …, **D**d4×f2$\ddagger$; Dies sind natürlich nur Beispiele.

6.4 Der Schach-Informator

Zu den beliebtesten regelmäßig erscheinenden Schachwerken zählt der Schach-Informator (Chess-Informant). Darin sind Partien aufgelistet und kommentiert. Diese Kommentare, die die beschriebene Notation ergänzen, benutzen spezielle Symbole als Abkürzungen. Diese haben, auf allgemeine Schachbretter bezogen, folgende Bedeutung:

$\stackrel{+}{=}$ Weiß steht etwas besser; bei mehr als zwei Spielern kann dieses Symbol durch $\stackrel{+}{=}_{\mathfrak{w}}$ ersetzt werden, wobei $\mathfrak{w}$ der besser stehende Spieler ist.

$\stackrel{=}{+}$ Schwarz steht etwas besser; s.o.

$\pm$ Weiß steht besser; kann analog durch $\pm_{\mathfrak{w}}$ ersetzt werden.

$\mp$ Schwarz steht besser; s.o.

$+-$ Weiß hat entscheidenden Vorteil; kann analog durch $+-_{\mathfrak{w}}$ ersetzt werden.

$-+$ Schwarz hat entscheidenden Vorteil; s.o.

$=$ ausgeglichen

∞ unklar

$\overline{\overline{\infty}}$ mit Kompensation für den materiellen Nachteil

$\circlearrowright$ Entwicklungsvorsprung

$\bigcirc$ beherrscht mehr Raum

$\rightarrow$ mit Angriff

$\uparrow$ mit Initiative

⇆ mit Gegenspiel

⊙ Zugzwang

matt

! ein sehr guter Zug

!! ein ausgezeichneter Zug

? ein schwacher Zug

?? ein grober Fehler

!? ein beachtenswerter Zug

?! ein Zug von zweifelhaftem Wert

△ mit der Idee

□ der einzig spielbare Zug

⌓ besser ist

⇔ Linie; bezeichnet die durch die Figurenebenenaxiome ausgezeichnete Raumrichtung des Spielers, auf dessen Zug sich das Symbol bezieht.

↗ Diagonale; bezeichnet bei allgemeinen Schachbrettern eine Diagonale, die als Komponente die im vorigen Punkt genannte Raumrichtung enthält.

⊞ Zentrum

≫ Königsflügel; bezeichnet bei endlichen Schachbrettern die Bretthälfte, die den König enthält, wenn das Brett zwischen Dame und König geteilt wird.

≪ Damenflügel; Bedeutung analog.

× schwacher Punkt

⊥ Endspiel

Läuferpaar

ungleichfarbige Läufer; bezeichnet Läufer gleicher Dimension, die sich in verschiedenen Untermengen befinden. Wird bei den Eigenschaften der Figuren erläutert.

gleichfarbige Läufer; bezeichnet Läufer gleicher Dimension, die sich in der gleichen Untermenge befinden. Wird bei den Eigenschaften der Figuren erläutert.

○○ verbundene Bauern; bezeichnet Bauern gleicher Richtung, die sich auf Linien befinden, die entlang einer anderen Raumrichtung benachbart sind und sich daher gegenseitig decken können.

○-○ isolierte Bauern; bezeichnet Bauern, für die dies nicht gilt.

$\substack{\circ\\\circ}$ Doppelbauern; bezeichnet Bauern, die entlang ihrer Zugrichtung direkt oder entfernt benachbart sind.

$\overset{\uparrow}{\circ}$ Freibauer; bezeichnet einen Bauern, der auf dem Weg zu seinem Umwandlungsfeld nicht mehr von gegnerischen Bauern geschlagen werden kann.

$>$ im Bauernmehrbesitz

$\oplus$ Zeit

N eine Neuerung

RR Anmerkung der Redaktion

R verschiedene Züge

$\lrcorner$ ohne

$\llcorner$ mit

$\|$ usw.

— siehe

Es sei ausdrücklich davor gewarnt, diese Symbole mit den Symbolen einer mathematischen Schachtheorie zu verwechseln! Die Informator-Symbole kommentieren Stellungen und Züge in einer Notation, während letztere die Eigenschaften von Brettern und Figuren unabhängig von der Qualität eines Zuges oder einer Stellung darstellen.

Teil II

Herleitung der Schachvarianten

Kapitel 7

Zweidimensionale Bretter

7.1 Konventionen

Bei zweidimensionalen Brettern ist - wie der Name schon sagt - $\dim \mathcal{B} = 2$. Die Indexmenge mit den beiden Raumrichtungen ist $\mathcal{I} = \{\underline{1}, \underline{2}\}$ und somit $\mathcal{I}^* = \{-\underline{2}, -\underline{1}, \underline{1}, \underline{2}\}$. Es ist daher sinnvoll, an dieser Stelle ein paar Konventionen für diese Klasse von Schachspielen zu nennen.

Grundsätzlich lassen sich die Felder auf diesen Schachbrettern durch 2-Tupel natürlicher Zahlen kennzeichnen. So sei ein Feld x gegeben durch $x = (x_1, x_2), x_1 \in \{0, \ldots, l_1 - 1\}, x_2 \in \{0, \ldots, l_2 - 1\}$. Dabei sind l_1 und l_2, die Kantenlängen, vom jeweiligen Brett abängige Parameter. Somit ist es möglich, das Brett darzustellen durch $\mathcal{B} = \{0, \ldots, l_1 - 1\} \times \{0, \ldots, l_2 - 1\}$. Die Anzahl der Felder in einem Brett ist damit gegeben durch $|\mathcal{B}| = l_1 \cdot l_2$.

Neben der Darstellung durch 2-Tupel ist die Verwendung von kleinen, lateinischen Buchstaben in Verbindung mit arabischen Zahlen gebräuchlich. Zwischen beiden Darstellungen existiert eine Bijektion, sie sind also äquivalent. Man definiert:

$$(0,0) \leftrightarrow a1; (1,0) \leftrightarrow a2; (0,1) \leftrightarrow b1$$

Die übrigen Bezeichnungen werden analog definiert.

Neben dem Brett weisen auch die Figuren einige Gemeinsamkeiten auf. Da das Brett zweidimensional ist, treten nur zweidimensionale Läufer auf, die deshalb kurz als Läufer bezeichnet werden: $\mathbf{L} := \mathbf{L}^2$. Somit hat jeder Spieler g eine Figurenmenge $\mathcal{F}_g = \{\mathbf{b}_g, \mathbf{S}_g, \mathbf{L}_g, \mathbf{T}_g, \mathbf{D}_g, \mathbf{K}_g\}$. Die Richtung der Bauern ist bei den ersten beiden Schachvarianten mit dem Besitzer assoziiert. Da dies beim Torusschach nicht der Fall ist, wird diese Assoziation später behandelt.

In Bezug auf die Züge gilt hier, dass das Unendlichkeitsaxiom überflüssig ist, da das Brett endlichdimensional ist.

Traditionell gibt es zwei Spieler, die durch die Farben weiß und schwarz gekennzeichnet sind. Diese werden durch Buchstaben in Frakturschrift dargestellt. Es ist somit $\mathcal{G} = \{\mathfrak{w}, \mathfrak{s}\}$.

7.2 Klassisches Schach

Das klassische Schachbrett besitzt die Kantenlängen $l_1 = l_2 = 8$ und somit $|\mathcal{B}| = 8^2 = 64$. Die Felder sind quadratisch in einer Ebene angeordnet. Es ist daher einfach, die Nachbarschaftsrelationen zweier Felder x, y anzugeben:

$$\forall k \in \mathcal{I} : (x \succ^k y \Leftrightarrow x_k = y_k + 1)$$

Damit ist das Brett vollständig definiert.

Die Startaufstellung ist durch die nachfolgende Tabelle gegeben. Felder, die nicht angegeben sind, sind zu Beginn leer.

x	$s_0(x)$	x	$s_0(x)$
a1, h1	$\mathbf{T}_{\mathfrak{w}}$	a8, h8	$\mathbf{T}_{\mathfrak{s}}$
b1, g1	$\mathbf{S}_{\mathfrak{w}}$	b8, g8	$\mathbf{S}_{\mathfrak{s}}$
c1, f1	$\mathbf{L}_{\mathfrak{w}}$	c8, f8	$\mathbf{L}_{\mathfrak{s}}$
d1	$\mathbf{D}_{\mathfrak{w}}$	d8	$\mathbf{D}_{\mathfrak{s}}$
e1	$\mathbf{K}_{\mathfrak{w}}$	e8	$\mathbf{K}_{\mathfrak{s}}$
a2 - h2	$\mathbf{b}_{\mathfrak{w}}^{\underline{1}}$	a7 - h7	$\mathbf{b}_{\mathfrak{s}}^{-\underline{1}}$

Tabelle 7.1: Startaufstellung beim klassischen Schach

Man kann leicht nachprüfen, dass alle nötigen Axiome erfüllt sind. Hier wird auch die bereits angedeutete Bauernassoziation deutlich. Das bedeutet, dass weiß nur $\underline{1}$-Bauern besitzt, während schwarz nur $-\underline{1}$-Bauern besitzt.

Beim klassischen Schach tritt die Rochade wie im ersten Teil dargestellt auf. Z.B. wird für weiß im ersten Schritt ein Turm von a1 nach d1 bzw. von h1 nach f1 gezogen. Anschließend zieht der König nach c1 bzw. g1.

An diesem einfachen Beispiel sieht man bereits, wie wenig Annahmen nötig sind, um aus der im ersten Teil entwickelten Schachtheorie ein vollständiges Schachspiel herzuleiten. Es genügt jedoch, diese Annahmen etwas zu verändern, um ein völlig anderes Ergebnis zu erhalten.

7.3 Zylinderschach

Man nehme ein klassisches Schachbrett mit seiner Grundaufstellung und wickle es so um einen Zylinder mit dem Umfang 8, dass die Figuren jedes Spielers ringförmig auf dem Zylindermantel angeordnet sind. Nun sind offenbar auch Felder, die vorher am linken bzw. rechten Rand des Spielfeldes waren, benachbart. Man kann dies als eine Erweiterung der Relation $\succ^{\underline{2}}$ auffassen. Die Nachbarschaftsrelationen zweier Felder x,y lauten nun:

$$x \succ^{\underline{1}} y \Leftrightarrow x_1 = y_1 + 1; x \succ^{\underline{2}} y \Leftrightarrow x_2 = y_2 + 1 \vee (x_2 = 0 \wedge y_2 = 7)$$

Die übrigen Regeln werden von klassischen Schach übernommen. Man kann zusätzlich zu den im klassichen Schach vorhandenen Rochaden noch zwei weitere definieren. Dabei zieht z.B. ein weißer ein Turm von a1 nach f1 bzw. von h1 nach d1. Der König zieht dann wie beim klassischen Schach.

7.4 Torusschach

Man nehme den Zylindermantel vom Zylinderschach und spalte die Felder x mit $x_1 \in \{1, \ldots, 6\}$ so auf, dass eine Hälfte innerhalb des Zylinders und eine außerhalb liegt. Die äußeren Felder behalten dabei die Bezeichnungen der Felder, aus denen sie gebildet wurden. Die inneren Felder wechseln ihre erste Komponente gemäß $x_1 \to 14 - x_1$. Man erhält auf diese Weise ein Brett mit $l_1 = 14; l_2 = 8$ und $|\mathcal{B}| = 14 \cdot 8 = 112$. Da die Anzahl der Felder gestiegen ist, stellt dieses Brett eine echte Erweiterung des Zylinders und damit auch des klassischen Bretts dar.

Auch die Nachbarschaftsrelationen wurden gegenüber dem Zylinderschach erweitert. Sie lauten nun:

$$x \succ^{1} y \Leftrightarrow x_1 = y_1 + 1 \vee (x_1 = 0 \wedge y_1 = 13); x \succ^{2} y \Leftrightarrow x_2 = y_2 + 1 \vee (x_2 = 0 \wedge y_2 = 7)$$

Wie man der Konstruktion unschwer entnehmen kann, handelt es sich hier um einen Torus.

Die Figuren kann man teilweise aus dem Zylinderschach übernehmen. Geht man zunächst von der Startaufstellung beim Zylinderschach aus, so stellt man fest, das sowohl das erste Bauernebenenaxiom als auch das Bedrohungsfreiheitsaxiom verletzt sind. Das liegt daran, dass die neu entstandenen Felder auf der Innenseite des Torus nicht besetzt sind. Man kann dies jedoch beheben, indem man zusätzlich folgende Figuren platziert:

$$x_1 = 13 \Rightarrow s_0(x) = \mathbf{b}_{\mathfrak{w}}^{-1}; x_1 = 8 \Rightarrow s_0(x) = \mathbf{b}_{\mathfrak{s}}^{1}$$

Die bei den bisherigen Varianten vorhandene Bauernassoziation ist damit offenbar aufgehoben. Alle weiteren Regeln, auch die Rochade, entsprechen denen des Zylinderschach.

Kapitel 8

Diamantschach

8.1 Allgemeine Definition

Der Grundgedanke des Diamantschach liegt darin, das klassische Schachbrett nicht nur in Anzahl der Felder und ihrer Nachbarschaftsrelationen zu erweitern, sondern auch die Anzahl der Dimensionen zu erhöhen. Das kanonische Brett eines n-dimensionalen Schachspiels der Kantenlänge l ist natürlich $\{0, \ldots, l-1\}^n$. Die Felder sind dann n-Tupel. Man kann auch $n = \infty$ zulassen und erhält dann unendliche Folgen statt endlicher Tupel. Auch die Nachbarschaftsrelationen sind schnell definiert. Wenn man jedoch versucht, eine Startaufstellung zu finden, wird man schnell Probleme mit dem zweiten Figurenebenenaxiom bekommen. Um eine komplette Ebene mit Figuren zu füllen, benötigt man l^{n-1} Figuren im engeren Sinne pro Spieler. Das ist bei $n \geq 3$ natürlich nicht praktikabel. Beim Diamantschach geht man daher einen anderen Weg: Die Ebenen, die mit Figuren besetzt sind, werden selektiv verkleinert.

Beim klassischen Schach befinden sich die Figuren im engeren Sinne jeweils am oberen und unteren Rand des Brettes. Wenn man dieses Prinzip übernimmt, muss man nur noch eine Möglichkeit finden, die Randebenen kleiner zu machen als die zentralen Ebenen. Der einfachste Weg besteht darin, die Ecken des kanonischen Brettes abzuschneiden. Mathematisch hat sich dabei folgendes Verfahren bewährt (Diamantschachbedingung):

$$\mathcal{B} := \left\{ x \in \{0, \ldots, l-1\}^n \middle| \sum_{i=1}^{n} \left(\left| x_i + \frac{1-l}{2} \right| - \frac{1}{2} \right) \leq \frac{l}{2} \right\}$$

Die Anwendung dieses Verfahrens reduziert die Anzahl der Felder in den Randebenen auf $n \cdot 2^{n-1}$. Dabei fällt auf, dass dieses Ergebnis unabhängig von l ist. Das ist durch die Konstruktion bedingt und durchaus beabsichtigt, da man ein solches Brett nun beliebig vergrößern und verkleinern kann, ohne die Startaufstellung wesentlich zu verändern. Wie die Startaufstellung aussieht, hängt von der Anzahl der Dimensonen ab. Diese und die Kantenlänge l sind die charakteristischen Parameter eines Diamantschachbrettes. Dabei ist $n \in \{3, 4, 5, \ldots, \infty\}$ und $l \in \{8, 10, 12, \ldots\}$.

Es gelten wie beim klassischen Schach die kanonischen Nachbarschaftsrelationen:

$$\forall k \in \mathcal{I} = \{\underline{1}, \ldots, \underline{n}\} : x \succ^k y \Leftrightarrow x_k = y_k + 1$$

Eine Rochade existiert nicht.

Wenn nicht anders angegeben, ist $l = 8$ angenommen. Man kann diese Einschränkung bedenkenlos aufheben. Die schwarzen Figuren befinden sich dann nicht mehr auf den Ebenen $x_1 = 7$ und $x_1 = 6$, sondern auf den Ebenen $x_1 = l-1$ und $x_1 = l - 2$

8.2 3D-Diamantschach

Man erhält das Brett und die Nachbarschaftsrelationen aus der allgemeinen Definition mit $n = 3$ und $l = 8$. Bei den Feldern handelt es sich somit um 3-Tupel. Man kann analog zum klassischen Schach eine Kombination aus Buchstaben und Zahlen einführen, indem man definiert:

$$(0,0,0) \leftrightarrow Aa1; (1,0,0) \leftrightarrow Aa2; (0,1,0) \leftrightarrow Ab1; (0,0,1) \leftrightarrow Ba1$$

Diese Felder sind zwar nicht im Schachbrett enthalten, bilden jedoch den Ursprung einer induktiven Namensgebung.

Die Figurenmenge ändert sich gegenüber den zweidimensionalen Varianten um einen zusätzlichen, dreidimensionalen Läufer. Dieser sei im folgenden als Wagen bezeichnet mit dem Symbol $\mathbf{W} := \mathbf{L}^3$. Mit diesen Definitionen kann man folgende Startaufstellung konstruieren:

x	$s_0(x)$
Cd1, Fe1	$\mathbf{T}_\mathfrak{w}$
Ec1, Df1	$\mathbf{S}_\mathfrak{w}$
Ed1, Ee1	$\mathbf{L}_\mathfrak{w}$
Dc1, Ce1, Ef1, Fd1	$\mathbf{W}_\mathfrak{w}$
De1	$\mathbf{D}_\mathfrak{w}$
Dd1	$\mathbf{K}_\mathfrak{w}$
Cd2, Ce2, Dc2, Dd2, De2, Df2, Ec2, Ed2, Ee2, Ef2, Fd2, Fe2	$\mathbf{b}_\mathfrak{w}^{1}$
Cd8, Fe8	$\mathbf{T}_\mathfrak{s}$
Ec8, Df8	$\mathbf{S}_\mathfrak{s}$
Ed8, Ee8	$\mathbf{L}_\mathfrak{s}$
Dc8, Ce8, Ef8, Fd8	$\mathbf{W}_\mathfrak{s}$
De8	$\mathbf{D}_\mathfrak{s}$
Dd8	$\mathbf{K}_\mathfrak{s}$
Cd7, Ce7, Dc7, Dd7, De7, Df7, Ec7, Ed7, Ee7, Ef7, Fd7, Fe7	$\mathbf{b}_\mathfrak{s}^{-1}$

Tabelle 8.1: Startaufstellung beim 3D-Diamantschach

Alle anderen Felder sind zu Beginn leer. Beim Betrachten der Tabelle fallen zwei Dinge auf: Zum einen existiert wieder eine Bauernassoziation. Das liegt daran, dass das Brett aus dem klassischen Schachbrett hergeleitet wurde.

Zum anderen besitzt jeder Spieler vier Wagen. Warum dies so ist, wird klar, wenn man das klassische Schachbrett betrachtet: Dieses zerfällt für die Läufer in zwei Untermengen, die durch schwarze und weiße Felder gekennzeichnet sind. Ein Läufer bewegt sich immer auf Feldern einer Farbe. Geht man nun zu k-dimensionalen Läufern wie dem Wagen mit $k = 3$ über, so stellt sich heraus, dass das Brett in 2^{k-1} Untermengen zerfällt. Jeder Wagen, den ein Spieler besitzt, befindet sich in einer anderen Untermenge. Dass dies nicht immer der Fall ist, wird sich beim Gausskugelschach zeigen.

8.3 4D-Diamantschach

Auch hier erhält man das Brett und die Nachbarschaftsrelationen aus der allgemeinen Definition durch Wahl von $n = 4$ und $l = 8$. Die Felder sind 4-Tupel, für die man folgende Bezeichnungen einführt:

$$(0,0,0,0) \leftrightarrow \alpha Aa1; (1,0,0,0) \leftrightarrow \alpha Aa2; (0,1,0,0) \leftrightarrow \alpha Ab1;$$

$$(0,0,1,0) \leftrightarrow \alpha Ba1; (0,0,0,1) \leftrightarrow \beta Aa1$$

Zu den Figuren tritt ein vierdimensionaler Läufer, der als Gewehrschütze bezeichnet wird: $\mathbf{G} := \mathbf{L}^4$. Folgende Startaufstellung ist denkbar:

x	$s_0(x)$
$\gamma Dd1, \delta Ce1, \delta Ef1, \epsilon Ec1, \epsilon Fe1, \zeta Ee1$	$\mathbf{T}_{\mathfrak{w}}$
$\gamma Ee1, \delta Ec1, \delta Fe1, \epsilon Cd1, \epsilon Df1, \zeta Dd1$	$\mathbf{S}_{\mathfrak{w}}$
$\gamma De1, \delta Dc1, \delta Fd1, \epsilon Ce1, \epsilon Ef1, \zeta Ed1$	$\mathbf{L}_{\mathfrak{w}}$
$\delta Dd1, \delta De1, \epsilon Dd1, \epsilon De1$	$\mathbf{W}_{\mathfrak{w}}$
$\gamma Ed1, \delta Cd1, \delta Df1, \delta Ee1, \epsilon Dc1, \epsilon Ee1, \epsilon Fd1, \zeta De1$	$\mathbf{G}_{\mathfrak{w}}$
$\delta Ed1$	$\mathbf{D}_{\mathfrak{w}}$
$\epsilon Ed1$	$\mathbf{K}_{\mathfrak{w}}$
$\gamma Dd8, \delta Ce8, \delta Ef8, \epsilon Ec8, \epsilon Fe8, \zeta Ee8$	$\mathbf{T}_{\mathfrak{s}}$
$\gamma Ee8, \delta Ec8, \delta Fe8, \epsilon Cd8, \epsilon Df8, \zeta Dd8$	$\mathbf{S}_{\mathfrak{s}}$
$\gamma De8, \delta Dc8, \delta Fd8, \epsilon Ce8, \epsilon Ef8, \zeta Ed8$	$\mathbf{L}_{\mathfrak{s}}$
$\delta Dd8, \delta De8, \epsilon Dd8, \epsilon De8$	$\mathbf{W}_{\mathfrak{s}}$
$\gamma Ed8, \delta Cd8, \delta Df8, \delta Ee8, \epsilon Dc8, \epsilon Ee8, \epsilon Fd8, \zeta De8$	$\mathbf{G}_{\mathfrak{s}}$
$\delta Ed8$	$\mathbf{D}_{\mathfrak{s}}$
$\epsilon Ed8$	$\mathbf{K}_{\mathfrak{s}}$

Tabelle 8.2: Startaufstellung beim 4D-Diamantschach

Zusätzlich sind noch die 32 Bauern pro Spieler vorhanden, die durch das erste Bauernebenenaxiom gefordert werden. Alle anderen Felder sind zu Beginn leer. Auch hier gibt es eine Bauernassoziation. Die 8 Gewehrschützen besetzen 8 Untermengen, wie bereits im 3D-Fall beschrieben.

8.4 n-dimensionales Diamantschach

Im Prinzip kann man so vorgehen wie bisher, um weitere Diamantschach-Versionen zu konstruieren. Allerdings wird es recht schnell unhandlich, die Startaufstellung manuell zu entwerfen. Es empfiehlt sich daher, nach einer allgemeinen Lösung zu suchen, die eine Startaufstellung für ein beliebiges n-dimensionales Diamantschach liefert. Dabei hat sich folgendes Schema als nützlich erwiesen, wobei hier der Fall beliebiger Kantenlänge angenommen ist:

Den $n-1$ Läufern gibt man in diesem Fall keine Namen, sondern bezeichnet sie nur als k-dimensionale Läufer. Die Bauern konstruiert man wieder mit dem ersten Bauernebenenaxiom. Alle weiteren Felder sind leer. Ansonsten gilt das bisher gesagte.

$$
\begin{aligned}
x_1 = 0 \wedge \forall i \geq 2 : x_i = \tfrac{l}{2} - 1 &\Rightarrow s_0(x) = \mathbf{K}_{\mathfrak{w}} \\
x_1 = 0 \wedge x_2 = \tfrac{l}{2} \wedge (\forall i \geq 3 : x_i = \tfrac{l}{2} - 1) &\Rightarrow s_0(x) = \mathbf{D}_{\mathfrak{w}} \\
x_1 = 0 \wedge x_3 = \tfrac{l}{2} - 1 \wedge (\forall i \in \{2,4,5,\ldots,n\} : x_i \in \left\{\tfrac{l}{2} - 1, \tfrac{l}{2}\right\}) \wedge (\exists i \geq 4 : x_i = \tfrac{l}{2}) &\Rightarrow s_0(x) = \mathbf{T}_{\mathfrak{w}} \\
x_1 = 0 \wedge x_3 = \tfrac{l}{2} \wedge (\forall i \in \{2,4,5,\ldots,n\} : x_i \in \left\{\tfrac{l}{2} - 1, \tfrac{l}{2}\right\}) &\Rightarrow s_0(x) = \mathbf{S}_{\mathfrak{w}} \\
x_1 = 0 \wedge (\forall i \geq 2 : x_i \in \left\{\tfrac{l}{2} - 2, \tfrac{l}{2} - 1, \tfrac{l}{2}, \tfrac{l}{2} + 1\right\}) \wedge (\exists! k \geq 1 : x_k \in \left\{\tfrac{l}{2} - 2, \tfrac{l}{2} + 1\right\}) &\Rightarrow s_0(x) = \mathbf{L}_{\mathfrak{w}}^k \\
x_1 = l - 1 \wedge \forall i \geq 2 : x_i = \tfrac{l}{2} - 1 &\Rightarrow s_0(x) = \mathbf{K}_{\mathfrak{s}} \\
x_1 = l - 1 \wedge x_2 = \tfrac{l}{2} \wedge (\forall i \geq 3 : x_i = \tfrac{l}{2} - 1) &\Rightarrow s_0(x) = \mathbf{D}_{\mathfrak{s}} \\
x_1 = l - 1 \wedge x_3 = \tfrac{l}{2} - 1 \wedge (\forall i \in \{2,4,5,\ldots,n\} : x_i \in \left\{\tfrac{l}{2} - 1, \tfrac{l}{2}\right\}) \wedge (\exists i \geq 4 : x_i = \tfrac{l}{2}) &\Rightarrow s_0(x) = \mathbf{T}_{\mathfrak{s}} \\
x_1 = l - 1 \wedge x_3 = \tfrac{l}{2} \wedge (\forall i \in \{2,4,5,\ldots,n\} : x_i \in \left\{\tfrac{l}{2} - 1, \tfrac{l}{2}\right\}) &\Rightarrow s_0(x) = \mathbf{S}_{\mathfrak{s}} \\
x_1 = l - 1 \wedge (\forall i \geq 2 : x_i \in \left\{\tfrac{l}{2} - 2, \tfrac{l}{2} - 1, \tfrac{l}{2}, \tfrac{l}{2} + 1\right\}) \wedge (\exists! k \geq 1 : x_k \in \left\{\tfrac{l}{2} - 2, \tfrac{l}{2} + 1\right\}) &\Rightarrow s_0(x) = \mathbf{L}_{\mathfrak{s}}^k
\end{aligned}
$$

Tabelle 8.3: Startaufstellung beim n-dimensionalen Diamantschach

8.5 Hilbert-Diamantschach

Bei der Betrachtung der Diamantschach-Definition fällt auf, dass selbst im Grenzübergang $n \to \infty$ ein Brett herauskommt, das allen Axiomen entspricht. Zwar hat jedes Feld unendlich viele Nachbarfelder, aber dies steht nicht im Widerspruch zu den Eigenschaften der Nachbarschaftsrelationen, da das Brett unendlichdimensional ist. Die Felder sind nun keine n-Tupel mehr, sondern Folgen, deren Glieder die Elemente der Menge $\{0, \ldots, l-1\}$ sind. Man kann die einzelnen Felder auffassen als Abbildungen $x : \mathbb{N} \to \{0, \ldots, l-1\}$. Die Diamantschachbedingung beschreibt nun keine endliche Summe mehr, sondern fordert die Konvergenz einer unendlichen Reihe, deren Grenzwert kleiner oder gleich der halben Kantenlänge sein muss. Da alle Summanden ≥ 0 sind, ist dies gleichbedeutend mit der absoluten Konvergenz. Man kann also die Summationsreihenfolge vertauschen.

Nun ist noch zu zeigen, dass auch Figuren und Startaufstellung sinnvoll übernommen werden können. Zunächst fällt auf, dass es nun unendlich viele Läufertypen gibt. Darüber hinaus hat jeder Spieler unendlich viele Figuren von jeder Sorte, aber nur einen König und eine Dame. Für letztere gilt das Unendlichkeitsaxiom.

Die Startaufstellung kann man direkt aus dem vorigen Kapitel übernehmen, da die Dimension n nicht explizit vorkommt. Es ist leicht zu zeigen, dass sie den Axiomen entspricht. Wie bei allen bisher besprochenen Diamantschach-Versionen gibt es eine Bauernassoziation.

8.6 Mehrparteien-Diamantschach

Das leere n-dimensionale Diamantschachbrett ist vollkommen symmetrisch in allen Raumrichtungen. Erst durch die Startaufstellung wird diese Symmetrie gebrochen, da die Zugrichtung der Bauern eine Vorzugsrichtung vorgibt. Es spricht aber im Prinzip nichts dagegen, auch die anderen Flächen mit Figuren zu besetzen und diese weiteren Spielern zuzuordnen. Damit aber die Symmetrie unter den Spielern erhalten bleibt (Symmetriebrechung erfolgt erst mit dem ersten Zug), muss jeder Spieler einen gegenüber liegenden Gegner haben. Die Anzahl der Spieler ist also stets gerade. Sie kann aber maximal $2n$ betragen, da es nur $2n$ Flächen gibt. Aber auch eine gerade Spielerzahl $2 < |\mathcal{G}| < 2n$ führt zu einer gebrochenen Symmetrie, nicht nur zwischen den Raumrichtungen, sondern auch zwischen den Spielern. Das liegt daran, dass sich die Figuren eines Spielers zu Beginn auf der Damenseite (oder Königsseite, Läuferseite etc.) eines benachbarten Spielers befinden, während der gegenüber liegende Spieler in der entgegengesetzten Situation ist. Absolute Symmetrie erhält man also nur mit $|\mathcal{G}| = 2n$, indem man die Koordinaten zyklisch vertauscht und so eine Startaufstellung erzeugt, die bezüglich einer Permutation der Raumrichtungen invariant, also isotrop ist. Das bedeutet natürlich auch, dass sich für Mehrparteien-Diamantschach nur endlichdimensionale Bretter eignen.

Wenn man nun eine solche Startaufstellung aus einer beliebigen n-dimensionalen Startaufstellung eines Brettes der Kantenlänge $l = 8$ ableitet, bekommt man schnell Probleme mit dem Bedrohungsfreiheitsaxiom: Die Bauern benachbarter Spieler bedrohen einander. Dieses Problem kann man nur beheben, indem man $l \geq 10$ wählt. Dann jedoch sind alle Axiome erfüllt.

Beim Mehrparteienschach stellt sich natürlich die Frage, wer gegen wen spielt und wer wann gewonnen oder verloren hat. Dabei sind prinzipiell folgende Konventionen denkbar:

- Unabhängigkeit der Raumrichtungen: Grundsätzlich können auf einem n-dimensionalen Diamantschachbrett n voneinander unabhängige Partien ausgetragen werden. Jede Partie findet zwischen zwei gegenüber liegenden Spielern statt, die man wieder mit weiß und schwarz bezeichen kann, wobei zusätzlich ein Index die Zugehörigkeit zu einer Partie angibt. Diesen kann man direkt mit der Zugrichtung der jeweiligen Bauern identifizieren, da es auch hier eine Bauernassoziation gibt. Man kann nun eine Zugreihenfolge aufstellen, also die Menge $\mathcal{G}$ zyklisch anordnen:

  $$\mathfrak{w}_1 \prec \mathfrak{w}_2 \prec \ldots \prec \mathfrak{w}_n \prec \mathfrak{s}_1 \prec \mathfrak{s}_2 \prec \ldots \prec \mathfrak{s}_n \prec \mathfrak{w}_1$$

  Es gibt verschiedene Möglichkeiten, wie die Teilnehmer an den verschiedenen Partien miteinander agieren und wann eine Partie beendet ist:

  - Die Auslegung des Selbstschlagaxioms kann ausgedehnt werden. Es ist konventional, ob ein Spieler Figuren aus einer anderen Partie schlagen kann oder nicht.[1]
  - Wenn eine der Partien endet, können entweder alle Partien enden (es gibt dann eine Punktewertung analog zum klassischen Schach, wobei der Sieger einen Punkt, der Verlierer 0 Punkte und jeder andere einen halben Punkt erhält) oder die übrigen Partien ohne die beiden anderen Spieler bis zu ihrem jeweiligen Ende ausgetragen werden. Die Figuren aus der beendeten Partie können entweder auf dem Brett belassen oder entfernt werden.

- Jeder gegen jeden: Bei dieser Variante ist jeder Spieler Gegner jedes anderen Spielers. Folglich wird auch das Selbstschlagaxiom in seiner bisherigen Form belassen. Auch hier ist das Ende der Partie konventional. Entweder endet die Partie, wenn einer der Spieler matt ist, wobei alle anderen Spieler je einen Punkt erhalten, oder es wird gespielt, bis nur noch ein

[1] Wenn Figuren aus einer anderen Partie (die sich zu Beginn an einer benachbarten Fläche befinden) nicht geschlagen werden können, ist der Fall $l = 8$ zugelassen, da sich fremde Bauern nicht bedrohen können.

Spieler übrig ist, der dann einen Punkt erhält.[2] In Bezug auf die Figuren eines mattgesetzten Spielers gilt das bei der vorigen Variante gesagte. Die Zugreihenfolge kann beliebig festgelegt werden.

- Bildung von Koalitionen: Alle an eine bestimmte Ecke angrenzenden Spieler können zu einer Koalition zusammengefasst werden. Alle anderen Spieler, die natürlich an die gegenüber liegende Ecke angrenzen, bilden die andere Koalition. Beim Ziehen wechseln sich die Spieler der beiden Koalitionen ab. Es gibt auch hier mehrere Möglichkeiten:
  - Entweder ist die Zugreihenfolge vorab genau festgelegt, oder es kann stets ein beliebiger Spieler der Koalition, die am Zug ist, eine seiner Figuren ziehen.
  - Das Selbstschlagaxiom kann auf zwei Arten definiert werden: Das starke Selbstschlagaxiom verbietet es jedem Spieler, Figuren seiner Koalitionspartner zu schlagen. Das schwache Selbstschlagaxiom verbietet nur das Schlagen der eigenen Figuren.
  - Die Partie kann enden, wenn ein König oder wenn alle Könige einer Koalition mattgesetzt sind.

8.7 Zylinder- und Torus-Analoga

Das klassische, zweidimensionale Schachbrett konnte durch hinzufügen von Nachbarschaftsrelationen und/oder Feldern erweitert werden. Das Diamantschachbrett bietet prinzipiell die gleichen Möglichkeiten.

8.7.1 Zylinder-Diamantschach

Das Analogon zum Zylinderschach erhält man, indem man die Felder beibehält, aber die Nachbarschaftsrelationen anders definiert:

$$\forall k \in \mathcal{I} : x \succ^k y \Leftrightarrow x_k = y_k + 1 \vee (k \neq \underline{1} \wedge x_k = 0 \wedge y_k = l - 1)$$

Die Analogie zum Zylinderschach ist offensichtlich. Während beim Zylinderschach die nicht mit Figuren besetzten Seiten einander benachbart werden, ist dies hier mit den nicht besetzten Flächen der Fall. Ansonsten gelten die Regeln des klassischen Diamantschach. Eine Übertragung auf Hilbert-Diamantschach ist möglich.

8.7.2 Torus-Diamantschach

Analog zum klassischen Torusschach erfolgt die Herleitung aus dem Zylinder-Diamantschach durch Verdoppelung der Felder x mit $0 < x_1 < l - 1$. Diese bekommen dann die neue Bezeichnung durch $x_1 \to 2l - 2 - x_1$ zugewiesen. Die Nachbarschaftsrelationen lauten nun:

$$\forall k \in \mathcal{I} : x \succ^k y \Leftrightarrow x_k = y_k + 1 \vee \left(x_k = 0 \wedge y_k = \begin{cases} 2l - 3 & \text{wenn } k = \underline{1} \\ l - 1 & \text{sonst} \end{cases} \right)$$

[2]Natürlich ist auch ein Remis möglich. Was dann geschieht, wenn ein Remis nach dem Matt einzelner Spieler eintritt, ist absolut konventional.

Auch hier wird die Zahl der Bauern verdoppelt, um das Bedrohungsfreiheitsaxiom und das erste Bauernebenenaxiom zu erfüllen. Wie beim klassischen Torusschach wird dadurch die Bauernassoziation aufgehoben. Auch hier ist eine Übertragung auf Hilbert-Diamantschach möglich.

8.7.3 Doppel-Diamantschach

Die Tatsache, dass ein Diamantschachbrett keine Ecken besitzt, erlaubt die Konstruktion eines dem Torus verwandten Bretts. Doppel-Diamantschach zählt zu den Schachvarianten, die nicht auf einem gerichteten Brett gespielt werden. Man muss hier auf lineare Teilmengen zurückgreifen.

Zunächst werden, ausgehend von einem beliebigen Diamantschach, die Felder verdoppelt, für die gilt:

$$\forall k \in \mathcal{I} : 0 < x_k < l - 1$$

Dabei werden diese Felder durch Einführung einer neuen Koordinate x_0 unterschieden, die den Wert $+1$ oder -1 annimmt. Für alle anderen Felder ist $x_0 = 0$. Nun definiert man lineare Teilmengen von $\mathcal{B}$. Man geht zunächst von einem beliebigen Feld x und einer Raumrichtung[3] k aus. Dann ist $\mathcal{L}_k$ eine Zerlegung von $\mathcal{B}$. Folglich ist x in genau einer Menge $L(x, k) \in \mathcal{L}_k$ enthalten. Man macht nun folgende Fallunterscheidung, die wegen der fehlenden Ecken notwendig ist:

- Wenn gilt:
$$\exists y \in \mathcal{B} : y_0 = 0 \wedge (\forall l \in \mathcal{I} \setminus \{k\} : y_l = x_l)$$
dann ist $L(x, k) = \{y | \forall l \in \mathcal{I} \setminus \{k\} : y_l = x_l\}$. Für die Definition einer Nachbarschaftsrelation ist eine weitere Fallunterscheidung nötig:
  - Wenn gilt:
$$\forall y \in L(x, k) : y_0 = 0$$
dann ist $L(x, k)$ nicht zyklisch und es gilt:
$$a \succ_{L(x,k)} b \Leftrightarrow a_k = b_k + 1$$
  - Ansonsten ist $L(x, k)$ zyklisch und es gilt:
$$a \succ_{L(x,k)} b \Leftrightarrow (a_0 \neq 0 \wedge a_k = b_k + a_0) \vee (b_0 \neq 0 \wedge a_k = b_k + b_0)$$
- Ansonsten ist $L(x, k) = \{y | \forall l \in \{0\} \cup \mathcal{I} \setminus \{k\} : y_l = x_l\}$ und es gilt:
$$a \succ_{L(x,k)} b \Leftrightarrow a_k = b_k + a_0$$
Das ist natürlich äquivalent zu
$$a \succ_{L(x,k)} b \Leftrightarrow a_k = b_k + b_0$$

Nun sind noch die Richtungswechsel zu definieren. Da es keine primitiven linearen Mengen gibt, gibt es nur direkte Richtungswechsel. Offenbar gilt weiterhin:

$$\forall x, y \in \mathcal{B}; k, l \in \mathcal{I} : (L(x, k) \parallel L(y, l) \Leftrightarrow k = l)$$

[3] Damit ist die Raumrichtung im Sinne der Definition des klassischen Diamantschach gemeint.

und

$$\forall x \in \mathcal{B}, k \in \mathcal{I} : L(x,k) \in \mathcal{L}_k$$

Die Richtungswechsel definiert man dann durch

$$L(x,k) \leftrightarrows L(y,k) \Leftrightarrow x_0 + y_0 = -1$$

Hier wird auch deutlich, warum keine Darstellung durch eine globale Nachbarschaftsrelation möglich ist. Ohne diese Richtungswechsel würden Läufer an dieser Ebene, die keine Symmetrieebene ist, reflektiert werden. Das macht beim Schach natürlich keinen Sinn.

Diese Geometrie erklärt auch den Namen dieses Schachbretts. Es handelt sich praktisch um zwei Diamantschachbretter, die sich an allen Flächen überlappen.

Die Startaufstellung konstruiert man analog zum Torusdiamantschach durch Aufstellen der Figuren im engeren Sinne[4] und Konstruktion der Bauern nach dem ersten Bauernebenenaxiom.

8.7.4 Mehrparteien-Doppel-Diamantschach

Man benutzt das gleiche Schachbrett wie beim einfachen Doppel-Diamantschach. Die Startaufstellung erhält man analog zum klassischen Mehrparteien-Diamantschach durch Permutation der Koordinaten aus $\mathcal{I}$. Auch die Regeln für den Umgang mit fremden Figuren und das Ende einer Partie sind die gleichen.

[4] Diese Felder wurden nicht verdoppelt.

Kapitel 9

Intervallschach

9.1 Allgemeine Definition

Ein abgeschlossenes, reelles Intervall stellt eine kompakte Menge in $\mathbb{R}$ dar. Durch Erweiterung dieses Konzepts auf $\mathbb{R}^n$ erhält man abgeschlossene Quader, die ebenfalls kompakte Mengen darstellen. Für $n \to \infty$ geht man in den Hilbertschen Folgenraum über, in dem diese Kompaktheit nicht mehr gilt.

Einige dieser - kompakten oder nicht kompakten - Intervall-Analoga eignen sich als Grundlage für unendlichdimensionale Schachbretter. Der Grundgedanke besteht darin, dass jede reelle Zahl $x \in [0; 1]$ bezüglich einer beliebigen Basis $b \geq 2$ als unendliche Folge von Ziffern ($x_i \in \{0, \ldots, b-1\}, i \in \mathbb{N}^*$) dargestellt werden kann durch[1]

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i b^{-i} =: 0, x_1 x_2 x_3 \ldots_b$$

Diese unendliche Reihe ist absolut konvergent, wie man mit dem Majorantenkriterium und der geometrischen Reihe sieht. Analog stellt man die einzelnen Komponenten der Elemente eines Quaders dar. Die Felder des Schachbrettes werden also durch unendliche Folgen dargestellt. Es gibt anzählbar viele Zahlen, die auf zwei Arten dargestellt werden können. Das ist immer dann der Fall, wenn ab einem bestimmten Folgenglied die Folgenglieder konstant 0 oder $b-1$ sind. Man kann nun entweder vereinbaren, dass diese Folgen das gleiche Feld oder verschiedene Felder repräsentieren. Bei den hier dargestellten Versionen ist stets letzteres angenommen.

Intervallschach macht allerdings nur für $b \geq 8$ Sinn, da b die Kantenlänge im unendlichdimensionalen darstellt.

Es gibt keine Rochaden.

9.2 Das Intervall $[0; 1]$

Im eindimensionalen Intervall kann man die Nachbarschaftsrelation analog zum Hilbert-Diamantschach definieren. Man erhält:

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : x \succ^k y \Leftrightarrow x = y + b^{-k}$$

[1] Es gilt $x = 1 \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}^* : x_i = b - 1$

Durch Addition von b^{-k} wird die k-te Ziffer um 1 erhöht.

Auch die Figuren kann man dem Hilbert-Diamantschach entnehmen, da es sich um ein unendlichdimensionales Brett handelt. Die Startaufstellung muss jedoch etwas anders konstruiert werden. Denkbar ist z.B. folgendes Schema:

$$\begin{aligned}
x = 0 &\Rightarrow s_0(x) = \mathbf{K}_{\mathfrak{w}}\\
x = b^{-2} &\Rightarrow s_0(x) = \mathbf{D}_{\mathfrak{w}}\\
0 < x < b^{-2} &\Rightarrow s_0(x) = \mathbf{T}_{\mathfrak{w}}\\
b^{-2} < x < 2b^{-2} &\Rightarrow s_0(x) = \mathbf{S}_{\mathfrak{w}}\\
2b^{-2} \leq x < b^{-1} &\Rightarrow s_0(x) = \mathbf{L}^k_{\mathfrak{w}}\\
b^{-1} \leq x < 2b^{-1} &\Rightarrow s_0(x) = \mathbf{b}^1_{\mathfrak{w}}\\
x = 1 &\Rightarrow s_0(x) = \mathbf{K}_{\mathfrak{s}}\\
x = 1 - b^{-2} &\Rightarrow s_0(x) = \mathbf{D}_{\mathfrak{s}}\\
1 - b^{-2} < x < 1 &\Rightarrow s_0(x) = \mathbf{T}_{\mathfrak{s}}\\
1 - 2b^{-2} < x < 1 - b^{-2} &\Rightarrow s_0(x) = \mathbf{S}_{\mathfrak{s}}\\
1 - b^{-1} < x \leq 1 - 2b^{-2} &\Rightarrow s_0(x) = \mathbf{L}^k_{\mathfrak{s}}\\
1 - 2b^{-1} < x \leq 1 - b^{-1} &\Rightarrow s_0(x) = \mathbf{b}^{-1}_{\mathfrak{s}}
\end{aligned}$$

Tabelle 9.1: Startaufstellung beim Intervallschach

Alle anderen Felder sind zu Beginn leer.

Bei den k-Läufern ist noch die Dimension k zu bestimmen. Man kann verwenden:

$$\mathbf{L}^k_{\mathfrak{w}} : k = \min_{x_i = \max_{j \in \mathbb{N}^*} x_j} i$$

$$\mathbf{L}^k_{\mathfrak{s}} : k = \min_{x_i = \min_{j \in \mathbb{N}^*} x_j} i$$

Da es nur endlichdimensionale Läufer gibt, gilt mit $c = b - a$:

$$\forall (a, b) \in \mathcal{Z}(s, g) : (s(a) = \mathbf{L}_g \Rightarrow \exists m > 2 : \forall i \geq m : c_i = 0)$$

Ein Läufer kann also nur Strecken zurücklegen, deren Länge durch ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{1}{b^m}$ mit endlichem m darstellbar sind. Das gleiche gilt natürlich auch für alle anderen Figuren ausser Dame und König. Diese beiden sind insbesondere die einzigen Figuren, die irrationale Distanzen überwinden können.[2]

9.3 Rauten, Oktaeder etc. im $\mathbb{R}^n$

Wenn man versucht, das beschriebene Intervallschach aus dem Intervall $[0; 1]$ in den abgeschlossenen Quader $\{x | \forall i \in \{1, \ldots, n\} : 0 \leq x^{(i)} \leq 1\}$ zu übertragen, wird man schnell in Schwierigkeiten kommen. Das betrifft vor allem die Zugrichtung der Bauern, die nicht ohne weiteres so zu definieren ist, dass die Bauern auch den gegnerischen Figurenbereich erreichen, um sich umzuwandeln, ohne dabei die Raumsymmetrie des Brettes zu zuerstören. Man kann daher ähnlich wie beim Diamantschach vorgehen und die Ecken des Quadern entfernen durch

$$\mathcal{B} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| \sum_{i=1}^{n} \left| x^{(i)} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

[2] Eine Distanz $c = 0,101001000100001000001\ldots$ ist offenbar irrational, da es keine endliche Periode gibt. Dennoch können sowohl König als auch Dame diese Distanz überwinden.

Folgende Nachbarschaftsrelation ist sinnvoll:

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, m \in \mathbb{N}^* : x \succ^{k+n\cdot m} y \Leftrightarrow x^{(k)} = y^{(k)} + b^{-(m+1)}$$

Man kann nun eine Startaufstellung dadurch konstruieren, dass man die Bedingungen aus dem Intervall $[0;1]$ nur auf die erste Komponente von x anwendet. Das steht in diesem Fall nicht im Widerspruch zum Existenzaxiom der Könige, da aus Bestimmungsgleichung für das Brett folgt:

$$\forall x \in \mathcal{B} : \left(x^{(1)} = 0 \Rightarrow \forall i \in \{2, \dots, n\} : x^{(i)} = \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \exists! x \in \mathcal{B} : x^{(1)} = 0$$

Folglich wird nur ein Feld pro Spieler mit einem König besetzt.

Diese Definition hat einige interessante Konsequenzen: Statt bisher einer Dame gibt es nun überabzählbar viele. Das bedeutet jedoch nicht, dass der Verlust einer Dame keine Bedeutung mehr hätte, da stets nur eine endliche Anzahl Damen aus ihrer Startaufstellung gezogen werden können.

9.4 Hilbert-Intervallschach

Analog zum Hilbert-Diamantschach kann man den Grenzübergang $n \to \infty$ betrachten. Für das Brett kann man diesen problemlos durchführen. Bei den Nachbarschaftsrelationen ist das jedoch nicht ohne weiteres möglich, da die Dimension n explizit in den Gleichungen auftritt. Dennoch ist die Menge der Raumrichtungen abzählbar, indem man definiert:

$$\forall k, m \in \mathbb{N}^* : x \succ^{l} y \Leftrightarrow x^{(k)} = y^{(k)} + b^{-m}; l = \frac{k(k+1) + m(m-1)}{2} + (m-1)(k-1)$$

Alles andere kann man direkt übernehmen.

9.5 Mehrparteien-Intervallschach

Man kann ein endlichdimensionales Intervall auch mit mehr als zwei Spielern nutzen. Die Vorgehensweise ist dabei analog zum Mehrparteien-Diamantschach. Auch die verschiedenen Varianten können übernommen werden. Dabei gilt auch hier (ausser bei unabhängigen Partien mit starkem Selbstschlagaxiom) $l \geq 10$.

9.6 Zylinder-Analoga

Analog zu den bisher diskutierten Varianten kann man die einzelnen Intervalle zu Zylindern erweitern. Eine Erweiterung des Intervalls um weitere Felder ist nicht möglich, da $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^n$ bereits vollständig sind. Es gibt daher keine Analoga zum Torus. Für die Zylinder-Analoga ergeben sich folgende Nachbarschaftsrelationen:

- eindimensional:

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : x \succ^{k} y \Leftrightarrow x = y + b^{-k} \vee (k \neq 1 \wedge x = y + b^{-k} - b^{-k+1})$$

- n-dimensional:

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, m \in \mathbb{N}^* : x \succ^{k+n\cdot m} y$$
$$\Leftrightarrow x^{(k)} = y^{(k)} + b^{-(m+1)} \vee (k + n \cdot m \neq 1 \wedge x^{(k)} = y^{(k)} + b^{-(m+1)} - b^{-m})$$

- unendlichdimensional:

$$\forall k, m \in \mathbb{N}^* : x \succ^l y \Leftrightarrow x^{(k)} = y^{(k)} + b^{-m} \vee (l \neq 1 \wedge x = y + b^{-m} - b^{-m+1});$$
$$l = \frac{k(k+1) + m(m-1)}{2} + (m-1)(k-1)$$

Kapitel 10

Gausskugelschach

Im vorigen Kapitel wurde gezeigt, wie man reelle Intervalle als Schachbrett verwenden kann. Das legt nahe, dass auch komplexe Zahlen geeignet sein können.

Auf die komplexe Zahlenebene werde im Ursprung eine durchsichtige Kugel mit dem Radius $\frac{1}{2}$ gelegt. Ein Beobachter betrachtet die Zahlenebene so durch die Kugel hindurch, dass sich der höchste Punkt der Kugel auf seiner Sichtlinie befindet. Die Sichtlinie schneidet die Kugel in einem weiteren Punkt und endet bei einer komplexen Zahl z. Ordnet man nun jeder komplexen Zahl z den Punkt auf der Kugel zu, an dem die Sichtlinie diese zum zweiten Mal schneidet, so wird die Zahlenebene bijektiv auf die Kugel mit Ausnahme des obersten Punktes abgebildet. Nimmt man diesen Punkt hinzu und bezeichnet dessen Urbild (das keine komplexe Zahl ist) mit ∞, so kann man die komplexen Zahlen um diesen Punkt ergänzen und erhält die kompakte Menge $\overline{\mathbb{C}}$. Diese soll nun als Schachbrett dienen.

Um aus einer solchen Menge ein Brett zu erzeugen, muss man eine Darstellung finden, die eine Aufstellung von Nachbarschaftsrelationen erlaubt. Man kann zunächst den Winkel zwischen dem betrachteten Sichtstrahl zur senkrechten mit θ bezeichnen. Dieser hängt offenbar nur von $|z|$ ab. Mit der Definition des Tangens findet man den Zusammenhang $|z| = \tan\theta$. Das Argument ϕ einer komplexen Zahl kann man direkt aus der klassischen Definition übernehmen. Man erhält somit $z = e^{i\phi}\tan\theta$ mit $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]; \phi \in [0; 2\pi)$. Um diese einfacher handhaben zu können, führt man normierte Winkel $\Theta = \frac{2\theta}{\pi}$ und $\Phi = \frac{\phi}{2\pi}$. Beide liegen nun im Intervall $[0; 1]$. Es gibt zwei Punkte, nämlich $z = 0$ und $z = \infty$, an denen Φ offenbar keine Rolle spielt. Das wird für die Startaufstellung von Bedeutung sein. Weiterhin bedeutet $\Phi = 0$ das gleiche wie $\Phi = 1$. Beide Darstellungen bezeichnen das gleiche Feld.

Die erhaltenen reellen Intervalle kann man nun wie beim Intervallschach bezüglich einer Basis $b \geq 8$ darstellen. Über die Mehrdeutigkeiten in der Darstellung gilt das dort gesagte.

Man kann nun folgende Nachbarschaftsrelationen definieren, an denen die Kugelform deutlich wird:

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : z_1 \succ^{2k-1} z_2 \Leftrightarrow \Theta_1 = \Theta_2 + b^{-k}; z_1 \succ^{2k} z_2 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : \Phi_1 = \Phi_2 + b^{-k} + n$$

Der letzte Term zeigt die Möglichkeit, um die Kugel herum zu ziehen.

Die Startaufstellung kann man direkt aus dem Intervallschach mit $[0; 1]$ übernehmen. Man verlangt einfach, dass die jeweilige Bedingung für Θ erfüllt ist.

Der Winkel Φ kann beliebig sein. Diese Definition steht nicht im Widerspruch zum Existenzaxiom der Könige, da sich diese auf $z = 0$ und $z = \infty$ befinden. Es handelt sich also unabhängig von Φ um jeweils nur ein Feld. Diese Φ-Freiheit eröffnet noch weitere Möglichkeiten: So kann z.B. ein beliebiger Läufer, der auf eines dieser Felder zieht, das gleiche Feld mit einem anderen, willkürlich gewählten Wert von Φ verlassen. Dabei kann er die Untermenge wechseln, in der er sich durch die Mengenteilung der Läufer befindet (also auf ein Feld einer anderen Farbe ziehen). Dies stellt keinen Widerspruch zu den Eigenschaften der Nachbarschaftsrelation dar, da es in einem unendlichdimensionalen Brett auch unendlich viele Nachbarn gibt.

Kapitel 11

Rationalschach

Beim Intervallschach wurde gezeigt, dass nur Dame und König irrationale Distanzen überwinden können. Diese Asymmetrie zwischen den Figuren kann man teilweise aufheben, indem man nur rationale Zahlen erlaubt. Damit gilt zwar nach wie vor das Unendlichkeitsaxiom für Dame und König (das Brett ist unendlichdimensional), hat aber keine praktische Bedeutung mehr, da jedes Feld entlang eine irrationalen Raumrichtung am Rand des Brettes liegt. Stellt man diese bezüglich einer beliebigen Basis $b \geq 8$ dar, so erhält man stets nach einer endlichen Anzahl aperiodischer Ziffern eine endliche Periode. Mehrdeutige Darstellungen werden wie beim Intervallschach behandelt. Die Nachbarschaftsrelation definiert man ebenfalls wie beim Intervallschach. Für die Startaufstellung kann man ein anderes Verfahren anwenden, wobei auch hier das Brett gegeben ist durch das (rationale) Intervall $[0;1]$:

$$
\begin{array}{r}
x = 0 \Rightarrow s_0(x) = \mathbf{K}_{\mathfrak{w}} \\
0 < x < b^{-1} \wedge \exists n \in \mathbb{N}^* : \forall m \geq n : x_m = 0 \Rightarrow s_0(x) = \mathbf{D}_{\mathfrak{w}} \\
0 < x < b^{-1} \wedge (\exists n \in \mathbb{N}^* : \forall m \geq n : x_m = x_n) \wedge ggT(x_2, 2) = 2 \Rightarrow s_0(x) = \mathbf{T}_{\mathfrak{w}} \\
0 < x < b^{-1} \wedge (\exists n \in \mathbb{N}^* : \forall m \geq n : x_m = x_n) \wedge ggT(x_2, 2) = 1 \Rightarrow s_0(x) = \mathbf{S}_{\mathfrak{w}} \\
0 < x < b^{-1} \wedge \forall n \in \mathbb{N}^* : \exists m \geq n : x_m \neq x_n \Rightarrow s_0(x) = \mathbf{L}_{\mathfrak{w}}^{k} \\
x_1 = 1 \Rightarrow s_0(x) = \mathbf{b}_{\mathfrak{w}}^{1} \\
x = 1 \Rightarrow s_0(x) = \mathbf{K}_{\mathfrak{s}} \\
1 - b^{-1} < x < 1 \wedge \exists n \in \mathbb{N}^* : \forall m \geq n : x_m = b - 1 \Rightarrow s_0(x) = \mathbf{D}_{\mathfrak{s}} \\
1 - b^{-1} < x < 1 \wedge (\exists n \in \mathbb{N}^* : \forall m \geq n : x_m = x_n) \wedge ggT(x_2, 2) = 2 \Rightarrow s_0(x) = \mathbf{T}_{\mathfrak{s}} \\
1 - b^{-1} < x < 1 \wedge (\exists n \in \mathbb{N}^* : \forall m \geq n : x_m = x_n) \wedge ggT(x_2, 2) = 1 \Rightarrow s_0(x) = \mathbf{S}_{\mathfrak{s}} \\
1 - b^{-1} < x < 1 \wedge \forall n \in \mathbb{N}^* : \exists m \geq n : x_m \neq x_n \Rightarrow s_0(x) = \mathbf{L}_{\mathfrak{s}}^{k} \\
x_1 = b - 2 \Rightarrow s_0(x) = \mathbf{b}_{\mathfrak{s}}^{-1}
\end{array}
$$

Tabelle 11.1: Startaufsteluung beim Rationalschach

Für die Läuferdimension eignet sich die Länge der Periode, da diese per definitionem ≥ 2 ist. Man berechnet diese unter Anwendung der Gesetze der rationalen Zahlen im Intervall $(0;1)$:

$$\forall x \in (0;1) : \exists!(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : ggT(p,q) = 1 \wedge \frac{p}{q} = x$$

und erhält

$$k = \min_{ggT(q, b^m - 1) = q} m$$

Damit sind alle Axiome erfüllt.

Analog zum Intervallschach kann man natürlich auch beim Rationalschach auf Rauten, Oktaedern oder einer Teilmenge des Hilbertschen Folgenraums Schach spielen. Die Herleitung erfolgt analog zum Intervallschach. Auch eine Erweiterung auf Zylinder-Rationalschach ist problemlos möglich.

Kapitel 12

Finitschach

Um die Felddoppeldeutigkeiten, die beim Intervallschach und beim Rationalschach auftreten, zu vermeiden, kann man das Brett auf solche Zahlen beschränken, die eine endliche Darstellung zur Basis b besitzen. Mit der bereits dargestellten Nomenklatur gilt also:

$$\forall x \in \mathcal{B} : \exists n \in N^* : \forall m > n : x_m = 0$$

Die Nachbarschaftsrelationen werden wieder übernommen. Damit kann man folgende Startaufstellung entwerfen:

$$\begin{aligned}
x = 0 &\Rightarrow s_0(x) = \mathbf{K}_{\mathfrak{w}} \\
x = b^{-2} &\Rightarrow s_0(x) = \mathbf{D}_{\mathfrak{w}} \\
x_1 = 0 \wedge x_2 = 0 \wedge \exists m > 2 : x_m > 0 &\Rightarrow s_0(x) = \mathbf{T}_{\mathfrak{w}} \\
x_1 = 0 \wedge x_2 = 1 \wedge \exists m > 2 : x_m > 0 &\Rightarrow s_0(x) = \mathbf{S}_{\mathfrak{w}} \\
x_1 = 0 \wedge x_2 > 1 &\Rightarrow s_0(x) = \mathbf{L}^k_{\mathfrak{w}} \\
x_1 = 1 &\Rightarrow s_0(x) = \mathbf{b}^1_{\mathfrak{w}} \\
x = \tfrac{b-1}{b} &\Rightarrow s_0(x) = \mathbf{K}_{\mathfrak{s}} \\
x = \tfrac{b-1}{b} + b^{-2} &\Rightarrow s_0(x) = \mathbf{D}_{\mathfrak{s}} \\
x_1 = b - 1 \wedge x_2 = 0 \wedge \exists m > 2 : x_m > 0 &\Rightarrow s_0(x) = \mathbf{T}_{\mathfrak{s}} \\
x_1 = b - 1 \wedge x_2 = 1 \wedge \exists m > 2 : x_m > 0 &\Rightarrow s_0(x) = \mathbf{S}_{\mathfrak{s}} \\
x_1 = b - 1 \wedge x_2 > 2 &\Rightarrow s_0(x) = \mathbf{L}^k_{\mathfrak{s}} \\
x_1 = b - 2 &\Rightarrow s_0(x) = \mathbf{b}^{-1}_{\mathfrak{s}}
\end{aligned}$$

Tabelle 12.1: Startaufsteluung beim Finitschach

Da jede Darstellung eines Feldes, auf dem sich ein Läufer befindet, eine Länge ≥ 2 aufweist, eignet sich diese, um die Dimension des entsprechenden Läufers festzulegen:

$$k = \min_{\forall m > n : x_m = 0} n$$

Dies bewirkt, dass ein Spieler von jedem Läufertyp nur endlich viele Figuren besitzt. Allerdings gibt es unendlich viel Läufertypen (das Brett ist unendlichdimensional). Es existiert eine Dame, die jedoch nicht nach dem Unendlichkeitsaxiom ziehen kann, da keine Felder in Richtung unendlichdimensionaler Diagonalen existieren. Die Anzahl der Türme und der Springer dagegen ist unendlich, wie auch die der Bauern.

Auch hier kann man wieder Bretter konstruieren, die auf höherdimensionalen Zahlenräumen basieren. Auch eine Erweiterung auf Zylinder-Finitschach ist ganz analog möglich.

Teil III

Strategien

Kapitel 13

Eigenschaften von Figuren

13.1 Bauern

Der Bauer hat eine Eigenschaft, die ihn klar von anderen Figuren unterscheidet. Ihm ist eine Vorzugsrichtung gegeben, in die er sich bei jedem Zug um mindestens ein Feld bewegen muss. Für alle anderen Figuren dagegen ist das Brett isotrop.

Beim Bauern ist noch eine weitere Symmetrie des Brettes gebrochen, nämlich seine Homogenität. Der Bauer bewegt sich stets ein Feld in seine Vorzugsrichtung, nur aus der Startaufstellung kann er auch zwei Felder ziehen.

Die dritte Symmetriebrechung beim Bauern besteht zwischen dem Ziehen auf unbesetzte Felder und dem Schlagen. Während der Bauer entlang seiner Vorzugsrichtung zieht, schlägt er entlang einer zweidimensionalen Diagonalen, die eine Komponente entlang seiner Vorzugsrichtung besitzt.

Die Begrenzung in der Reichweite macht den Bauern zu einer eher defensiven Figur. Man kann damit nur schwer den Gegner angreifen, aber mit einer Bauernkette eine wirksame Verteidigung aufbauen. Daneben hat der Bauer eine Funktion als Figurenreserve, da er bei Erreichen des gegnerischen Figurenbereichs in eine andere Figur gewechselt wird. Auch dies unterscheidet ihn von anderen Figuren.

13.2 Türme

Beim jedem Turmzug gibt es eine lineare Teilmenge des Brettes, die sowohl das Startfeld als auch das Zielfeld enthält. Jedes Feld eines n-Dimensionalen Brettes ist in genau n linearen Teilmengen enthalten, da es genau n Zerlegungen des Brettes gibt. Somit kann der Turm in bis zu $2n$ Richtungen ziehen. Wenn nun weiterhin alle anderen Felder dieser Teilmengen leer sind, werden sie vom Turm bedroht.

13.3 Springer und Läufer

Auf den ersten Blick erscheinen Springer und Läufer als vollkommen verschiedene Figuren. Tatsächlich besteht zwischen beiden ein enger mathematischer

Zusammenhang.

Bereits beim Diamantschach wurde angedeutet, dass die meisten Schachbretter[1] für einen k-dimensionalen Läufer ein 2^{k-1} Untermengen zerfallen, zwischen denen ein Läufer niemals wechseln kann. Nun kann ein k-dimensionaler stets ein Feld entlang einer k-dimensionalen Diagonalen ziehen. Das bedeutet, dass, wenn es eine Familie von k paarweise verschiedenen Richtungen $(l_i, i \in \mathcal{I}^*)$ so gibt, dass $a \succ^{(l_i)} b$ gilt, ein Läufer von a nach b ziehen kann. Wenn es nun weiter ein Feld c, eine Familie (m_i) und einen Index j so gibt, dass gilt:

$$m_i = \begin{cases} l_i & \text{wenn } i = j \\ -l_i & \text{sonst} \end{cases} ; b \succ^{(m_i)} c$$

so ist auch ein Läuferzug von b nach c möglich. Folglich sind a, b und c in der gleichen Untermenge für einen k-dimensionalen Läufer. Betrachtet man nun die Felder a und c, so gilt mit der Definition der entfernten Relationen offenbar $a \succ^{l_j, m_j} c \Leftrightarrow a \succ^{l_j, l_j} c$. Es gibt also eine Richtung, entlang der man in einer Entfernung von zwei Feldern das ursprüngliche Feld findet. Dies gilt auch dann, wenn man diese Richtung nicht global, sondern nur lokal definiert. Das Feld zwischen diesen beiden Feldern muss nun zwangsläufig einer anderen Untermenge angehören als die beiden äußeren Felder. Folglich ist jedes Nachbarfeld eines beliebigen Feldes für jeden Läufer in einer anderen Untermenge enthalten.

Basierend auf diesen Grundlagen kann man nun einen Springer ziehen. Dieser zieht ein Feld in einer Richtung (und wechselt dabei die Untermenge für jeden Läufer) und zwei Felder in einer anderen Richtung (wobei er in der gleichen Untermenge bleibt). Folglich befindet sich ein Springer nach einem Zug stets in einer anderen Untermenge für jeden beliebigen Läufer.

13.4 Dame und König

Bei unendlichdimensionalen Schachbrettern sind Dame und König die einzigen Figuren, die entlang einer unendlichdimensionalen Diagonalen ziehen können. Das bedeutet, dass ein König auf ein Feld ziehen kann, welches nicht in endlich vielen Zügen von allen anderen Figuren ausser der Dame erreicht werden kann. Dadurch kommt der Dame bei unendlichdimensionalen Brettern eine besondere Bedeutung zu, wie später bei den Strategien gezeigt wird.

13.5 Wert der Figuren

[1] Wenn man bei den übrigen Brettern wie z.B. beim Gausskugelschach einzelne Punkte (in diesem Fall sind dies 0 und ∞) entfernt, gilt die Behauptung allgemein.

Kapitel 14

Basisstrategien

Beim Schach gibt es eine Reihe von elementaren starategischen Strukturen, deren Anwendung bei allen Varianten hilfreich ist.

14.1 Gabeln

Eine wichtige Taktik, Materialgewinn zu erzielen, sind Gabeln. Dabei wird eine Figur so platziert, dass sie zwei gegnerische Figuren gleichzeitig bedroht. Der Gegner har nun prinzipiell die Möglichkeit, eine dieser beiden Figuren in Sicherheit zu bringen oder die drohende Figur zu schlagen. Besonders effektiv ist eine Gabel daher, wenn die drohende Figur gedeckt oder für den Gegner unerreichbar ist. So kann dieser bestenfalls auf einen Abtausch von Figuren hoffen. Es gibt jedoch auch Situationen, in denen der Gegner keine seine Figuren zu retten versucht, sondern seinerseits eine Gabel errichtet. Damit kann er häufig einen Ausgleich erzielen. Dies ist jedoch nicht möglich, wenn sein König durch die Gabel bedroht wird. Dieser muss natürlich aus dem Schach gezogen werden, sodass die andere bedrohte Figur verloren ist.

14.2 Fesselungen

Eine Möglichkeit, die Bewegungsmöglichkeiten des Gegner einzuschränken, besteht darin, seine Figuren zu fesseln. Man sorgt also dafür, dass sie ihre momentane Position nicht verlassen können. Dafür platziert man eine seiner einegen Figuren so, dass die zu fesselnde Figur zwischen der gezogenen Figur und einer wichtigen Figur des Gegners, meist dem König steht. Man unterscheidet nun zwischen echter, fast echter und unechter Fesselung. Bei echter Fesselung kann sich die gefesselte Figur überhaupt nicht bewegen. Dies ist der Fall, wenn der König geschützt werden muss und die gefesselte Figur diesen bei jedem Zug preisgeben würde. Die Fesselung ist fast echt, wenn sich die Figur nur in einer Richtung, zwischen dem König und der fesselnden Figur bewegen kann. Bei einer unechten Fesselung ist eine andere Figur als der König zu beschützen.

Um einer Fesselung zu entgehen, hat ein Spieler mehrere Möglichkeiten. Die einfachste besteht darin, die fesselnde Figur zu vertreiben. Eine anderen Möglichkeit ist es, die zu beschützende Figur aus der Gefahrenzone zu ziehen. In einigen Fällen besteht die Möglichkeit, eine andere, weniger wichtige Figur in die Fesselungslinie zu ziehen, um die andere Figur gefahrlos ziehen zu können. Bei einer unechten Fesselung gibt es schließlich noch die Möglichkeit, die bedrohte Figur zu opfern oder hinreichend zu decken.

14.3 Opfer

Manchmal kann es von Vorteil sein, eine der eigenen Figuren zu Opfern, um trotz dieses Materialverlusts einen taktischen Vorteil zu erzielen. Besonders vorteilhaft ist es natürlich, wenn man den Gegner damit mattsetzt. Im Allgemeinen zwingt man den Gegner durch ein Opfer dazu, eine bestimmte Figur zu schlagen und damit einen Stellungsnachteil zu erleiden. Wenn dieser das Materialungleichgewicht überwiegt, war das Opfer korrekt, ansonsten inkorrekt. Es gibt aber auch Opfer ohne Zwang, wie dies bei Gambits der Fall ist. Bei dieser Eröffnungsvariante wird dem Gegner ein Bauer zum Schlagen angeboten. Er kann diesen mit Zeitverlust und Materialgewinn schlagen oder die Entwicklung seiner Figuren vorantreiben.

14.4 Abzugsangriffe

Ein besonders starker Angriff kann dadurch erzielt werden, dass eine Figur, die vorher eine Figur des gleichen Spielers verdeckt hat, von dieser Verdeckung weggezogen wird. Der vorher verdeckten Figur wird damit ein direkter Eingriff ins Geschehen ermöglicht. Somit wird praktisch eine Figur mehr verfügbar. Der Angriff wird noch verstärkt, wenn auch die abgezogene Figur einen Angriff führt. Da der Gegner im Allgemeinen nicht beiden Angriffen entgehen kann, kann ein solcher Abzugsangriff zu schweren Materialverlusten führen. Am deutlichsten ist dies, wenn eine der beiden Figuren dem König Schach bietet. Da sich der Gegner um diesen kümmern muss, hat die andere Figur meist freie Hand.

14.5 Doppelschach

Wenn bei einem Abzugsangriff gleich beide Figuren Schach bieten, so spricht man von einem Doppelschach. Diesem kann der Gegner weder durch Dazwischenziehen einer anderen Figur,[1] noch durch Schlagen einer der Schach bietenden Figuren möglich. Folglich muss der König aus dem Schach gezogen werden. Ist dies nicht möglich, so ist er matt. Das Doppelschach stellt damit einen sehr starken Angriff dar.

14.6 Ersticktes Matt

Bei einem erstickten Matt wird der König durch seine eigenen Figuren so stark in seiner Bewegungsfreiheit eingeschränkt, dass er dem Schachgebot einer gegnerischen Figur nicht mehr entgehen kann. Dabei wird der König zunächst durch eine Reihe von Schachgeboten dazu gebracht, sich mit seinen eigenen Figuren einzumauern, sofern dies noch nicht der Fall ist. Dann genügt eine einzige Figur, die dem Gegner Schach bietet, aus dem er nun nicht mehr entkommen kann. Ein

[1] Dies ist auch der Fall, wenn der Springer Schach bietet.

Beispiel aus dem klassischen Schach, das man auch beim Zylinderschach findet, ist das Grundlinienmatt. Dabei wird der König durch eine Begrenzungslinie des Brettes und durch seine eigenen Figuren auf der Grundlinie festgehalten, die nun durch eine Dame oder einen Turm komplett bedroht werden kann.

14.7 Opposition

Wenn zwei Könige entlang einer beliebigen Raumrichtung in einer Entfernung von zwei Feldern stehen, befinden sie sich in Opposition. Dies wird dargestellt durch:

$$\exists a, b \in \mathcal{B} : s(a) = \mathbf{K}_g \wedge s(b) = \mathbf{K}_{g'} \wedge \exists k \in \mathcal{I}^* : a \succ^{k,k} b$$

Der König, der als erster aus dieser Position zieht, gibt die Opposition auf. Der andere hält die Opposition.

14.8 Freibauern

Ein Freibauer ist ein Bauer, der auf dem Weg zu seinem Umwandlungsfeld nicht mehr von gegnerischen Bauern geschlagen werden kann. Wird er zusätzlich von einer anderen Figur gedeckt, so handelt es sich um einen gedeckten Freibauern. In Endspielen kommt es oft auf die Umwandlung eines solchen Freibauern an.

14.9 Doppelbauern

Befinden sich zwei Bauern auf Feldern, die entlang ihrer Zugrichtung direkt oder entfernt benachbart sind, so bezeichnet man sie als Doppelbauern. Solche Bauern sind nicht in der Lage, sich gegenseitig zu decken und bilden daher oft einen Schwachpunkt.

14.10 Schwache Bauern

Bei einigen Brettern sind bestimmte Bauern in der Startaufstellung besonders schwach, weil sie allein vom König gedeckt werden. Dieser kann sie jedoch nicht immer verteidigen, weil er sich z.B. ins Schach stellen würde. Dies ermöglicht es dem Gegner, an dieser Stelle einen Angriff durchzuführen, der meist schwer abgewehrt werden kann. Daher ist es bei der Eröffnung wichtig, diese Bauern vor allem durch Leichtfiguren zu decken.

Kapitel 15

Eröffnungen

15.1 Bauerneröffnungen

Analog zum klassischen Schach kann man auch auf anderen Brettern eine Schachpartie mit einem Bauernzug eröffnen. Am stärksten ausgeprägt ist diese Analogie natürlich bei den zweidimensionalen Varianten. So kann man sowohl beim klassischen Schach als auch beim Zylinderschach als traditionelle Eröffnung den Königsbauern oder auch den Damenbauern ziehen. Beim Torusschach gibt es sogar je zwei Bauern für jede Figur im engeren Sinne, die vor dem ersten Zug völlig gleichberechtigt sind. Ziel ist in allen Fällen eine Öffnung der Bauernreihe, um andere Figuren ins offene Feld ziehen zu können. Wie beim klassischen Schach ist hier jedoch Vorsicht geboten, um nicht das Narrenmatt zu erleiden. Dieses wird beim klassischen wie beim Zylinderschach dadurch erreicht, dass Weiß seinen Bauern von f2 nach f4 zieht. Darauf zieht Schwarz seinen Bauern von e7 nach e6. Wenn Weiß nun seinen Bauern von g2 nach g4 zieht, kann Schwarz seine Dame von d8 nach h4 ziehen und setzt Weiß damit matt.

Nach dem ersten Zug von Weiß hat Schwarz beim Torusschach eine weitere Möglichkeit gegenüber dem klassischen Schach. Es kann entweder eine Figur auf der inneren oder der äußeren Seite des Torus gezogen werden, also entweder auf der gleichen oder auf der entgegengesetzten Seite wie Weiß. Damit kann Schwarz das weiße Lager praktisch von Hinten angreifen.

Analoge Züge gibt es auch bei anderen endlichdimensionalen Brettern. Auch hier wird dadurch den anderen Figuren ein Weg ins offene Feld geöffnet. Dies ist selbst auf unendlichdimensionale Bretter übertragbar.

Wenn Weiß die Partie mit einem Bauernzug um zwei Felder eröffnet, kann Schwarz auf einem Brett der Kantenlänge 8 seinen entsprechenden Bauern ebenfalls um zwei Felder ziehen und so beide Bauern festsetzen. Ohne den Eingriff weiterer Figuren, die entweder einen Bauern schlagen oder geschlagen werden können, können sich die beiden Bauern nicht aus dieser Lage befreien.

Diese Analogie zum klassischen Schach ermöglicht es, auch die Eröffnungen analog zu charakterisieren. So kann man z.B. durch den Zug des Damenbauern eine geschlossene Partie eröffnen. Wenn nun Schwarz das gleiche tut und Weiß danach einen benachbarten Bauern zieht, ergibt sich ein Damengambit, welches Schwarz annehmen kann oder nicht. So lassen sich prinzipiell auch andere Eröffnungen übertragen.

15.2 Springereröffnungen

Wie der Name bereits sagt, kann ein Springer über die von ersten Bauernebenenaxiom geforderte Bauernebene hinwegspringen. Somit kann ein Spieler die Partie auch mit einem Springer eröffnen. Dadurch bleiben die Bauern in einer defensiven Position, während der Springer eine Offensive übernimmt. Damit können Felder in offenen Feld gedeckt werden, bevor weitere Figuren ins Spiel kommen.

15.3 Läufereröffnungen

Beim Diamantschach gibt es zusätzlich zu den genannten Möglichkeiten auch die Möglichkeit, die Partie mit einem Läufer zu eröffnen. Mit welchen Läufern dies jeweils möglich ist, hängt von der einzelnen Variante ab. So kann man z.B. beim dreidimensionalen Diamantschach jeden Wagen aus der Startaufstellung um ein Feld ziehen. Ähnlich zu den Springereröffnungen bleiben die Bauern in einer defensiven Position. Das offensive Potential eines Läufers ist jedoch größer als das eines Springers. Da sich allerdings der Läufer nach der Eröffnung in der Bauernebene neben den Bauern, also am Rand des Brettes befindet, ist diese Art der Eröffnung mit der Springereröffnung gleichwertig.

15.4 Dameneröffnungen

Die offensivste Möglichkeit, eine Diamantschachpartie zu eröffnen, besteht darin, die Dame in die Bauernebene zu ziehen. Diese bedroht einen großen Bereich des offenen Feldes, während die Bauern in der Defensive bleiben. Gleichzeitig wird verhindert, dass der Gegner einen analogen Zug ausführt, da er dann von der Dame bedroht würde.

Kapitel 16

Mattprobleme

Auf jedem Brett gibt es Situationen, in denen eine Partie bereits dadurch entschieden ist, welche Figuren die beiden Spieler besitzen. Es gelingt dann immer einem Spieler, den anderen in endlich vielen Zügen mattzusetzen. In den hier gezeigten Beispielen wird stets Weiß im Vorteil sein, aber es geht natürlich auch umgekehrt.

Da jede der gezeigten Aufgaben allein durch die vorhandenen Figuren und das Brett charakterisiert ist,[1] werden im Folgenden auch nur diese Daten zur Charakterisierung benutzt.

16.1 $\mathbf{K}_{\mathfrak{w}}, \mathbf{T}_{\mathfrak{w}}, \mathbf{K}_{\mathfrak{s}}$, klassisches Schach

Am einfachsten kann man den gegnerischen König mit einem Turm in die Ecke treiben, den man stets durch den eigenen König deckt. Der Spielraum des Gegners nimmt ab, bis er nicht mehr ausweichen kann.

16.2 $\mathbf{K}_{\mathfrak{w}}, 2\mathbf{L}_{\mathfrak{w}}, \mathbf{K}_{\mathfrak{s}}$, klassisches Schach

Die beiden Läufer befinden sich auf Feldern unterschiedlicher Farbe, besetzen also zwei verschiedene Untermengen. Zwei benachbarte Läufer bedrohen stets zwei benachbarte Diagonalen. Diese Barriere ist für den gegnerischen König unüberwindbar. Man kann somit den gegnerischen König in eine Ecke treiben, in deren Nähe man zuvor den eigenen König platziert hat. Indem man die Läufer Stückweise vorrückt, verkleinert man den Spielraum des Königs, bis er nicht mehr ausweichen kann.

Beim Torusschach ist diese Variante trivial, da zwei Läufer auf verschiedenfarbigen Feldern alle Felder des Brettes bedrohen, wenn sie nicht durch andere Figuren darab gehindert werden.

[1]Dabei sollen sich die Figuren zu Beginn nicht bedrohen, damit auch nach dem ersten Zug noch die gleichen Figuren vorhanden sind.

16.3 $\mathbf{K}_{\mathfrak{w}}, \mathbf{L}_{\mathfrak{w}}, \mathbf{T}_{\mathfrak{w}}, \mathbf{K}_{\mathfrak{s}}$, Zylinderschach

Statt eines der Läufer aus dem vorigen Beispiel habe Weiß einen Turm. Da es im Zylinderschach keine Ecken gibt, dient der Turm als zusätzliche Begrenzung. Der Vorgang des Mattsetzens erfolgt ähnlich wie im vorigen Beispiel, ist aber etwas komplizierter. Man kann nämlich nicht den ungedeckten Turm in die Nähe des gegnerischen Königs ziehen, da dieser ihn sonst schlagen würde. Es empiehlt sich, den Turm mit dem eigenen König zu decken und mit dieser Kombination den gegnerischen König gegen eine Begrenzungslinie zu treiben. Der Turm bedroht dann alle Felder der zweiten Zeile, während sich der gegnerische König in der ersten Zeile befindet. Mindestens ein Feld dieser ersten Zeile wird durch den Läufer bedroht, ein Feld durch den Turm. Man kann den Bereich dazwischen, in dem sich der gegnerische König befindet, immer enger machen, bis der Gegner matt ist.

16.4 $\mathbf{K}_{\mathfrak{w}}, 2\mathbf{T}_{\mathfrak{w}}, \mathbf{K}_{\mathfrak{s}}$, Zylinderschach

Das vorige Beispiel funktioniert auch, wenn Weiß statt des Läufers einen zweiten Turm besitzt, der dessen Rolle übernimmt. Die Taktik ist die gleiche.

16.5 $\mathbf{K}_{\mathfrak{w}}, \mathbf{D}_{\mathfrak{w}}, \mathbf{K}_{\mathfrak{s}}$, Zylinderschach

Wenn Weiß eine Dame besitzt, ist eine Figur weniger notwendig als bei den vorigen Beispielen. Das liegt daran, dass der schwarze König diese nicht schlagen kann. Bei jedem Versuch, in ihre Nähe zu kommen, würde er sich selbst ins Schach stellen, was dem Königsaxiom widerspricht. Folglich muss die Dame nicht gedeckt werden. Man platziert daher den eigenen König an der Berandung, gegen die man später mit der Dame den gegnerischen König treibt. Dieser ist nun zwischen Dame und König eingsperrt und kann mattgesetzt werden.

16.6 $\mathbf{K}_{\mathfrak{w}}, \mathbf{S}_{\mathfrak{w}}, 2\mathbf{T}_{\mathfrak{w}}, \mathbf{K}_{\mathfrak{s}}$, Torusschach

Beim Torusschach gibt es keine natürliche Berandung, gegen die man den gegnerischen König treiben kann. Man kann jedoch einen Turm hinzunehmen, der diese Aufgabe übernimmt. Man platziert diesen so, dass er durch den Springer gedeckt ist, während der andere Turm durch den König gedeckt wird. Die beiden Türme spannen ein Rechteck um den gegnerischen König auf, das man immer enger machen kann.

Kapitel 17

Klassische Strategien

Diese Strategien entstammen ursprünglich dem klassischen Schach und sind daher am leichtesten auf damit verwandte Bretter anzuwenden. Dies sind in erster Linie die zweidimensionalen Bretter, aber auch Diamantschachbretter mit der Kantenlänge 8.

17.1 Die Italienische Partie

Die Italienische Partie beginnt, indem sowohl Weiß als auch Schwarz ihren Königsbauern um zwei Felder vorrücken. Nun greift Weiß den schwarzen Königsbauern (im Allgemeinen mit einem Springer) an, worauf Schwarz diesen (im Allgemeinen ebenfalls mit einem Springer) verteidigt. Nun zieht Weiß mit einen Läufer auf ein Feld, von dem aus er einen gegnerischen Bauern schlagen könnte, der mit dem König eine für den Läufer passende Diagonale bildet. Dieser übt nun zunächst einmal Kontrolle auf das Zentrum aus. Zugleich droht er damit, ein schwaches Feld in der gegnerischen Bauernfront anzugreifen. Bei zweidimensionalen Brettern bereitet er darüber hinaus auch eine Rochade vor, die nun nur noch ausgeführt werden muss. Dieser letzte Läuferzug kann nun von Schwarz erwidert werden.

17.2 Die Spanische Partie

Die spanische Partie beginnt ähnlich wie die italienische Partie. Zunächst rücken beide Spieler ihre Königsbauern um je zwei Felder vor. Weiß greift den schwarzen Bauern an, Schwarz verteidigt diesen. Auch hier zieht Weiß nun einen Läufer, allerdings greift er damit die Deckung des gegnerischen Königsbauern an. Auch damit übt er Kontrolle auf das Zentrum aus, allerdings tut er dies indirekt. Ohne seine Deckung ist der schwarze Königsbauer dem weißen Angriff schutzlos ausgeliefert. Schwarz kann nun versuchen, den angreifenden Läufer zu vertreiben, indem er einen seiner Bauern einsetzt. Nun hat Weiß die Möglichkeit, sich mit seinem Läufer zurückzuziehen, oder nach einem Abtausch den schwarzen Königsbauern zu schlagen.

17.3 Die Französische Partie

Eher zurückhaltend beginnt die französische Partie. Weiß zieht seinen Königsbauern um zwei Felder vor. Schwarz zieht nun seinen Königsbauern, allerdings nur um ein Feld. Weiß reagiert darauf, indem er seinen Damenbauern ebenfalls um zwei Felder vorrückt und so stärkere Kontrolle auf das Zentrum ausübt. Schwarz zieht nun seinerseits den Damenbauern um zwei Felder vor. Das Zielfeld dieses Zuges ist durch den Königsbauern gedeckt, der diesen Zug somit vorbereitet hat. Nun hat Weiß die Möglichkeit, den schwarzen Damenbauern entweder zu schlagen und einen Abtausch zu erzielen, oder an diesem vorbei zu ziehen. Erstere Variante führt zu einer symmetrischen Stellung im nächsten Zug und gilt daher als remisverdächtig. Beim Vorbeiziehen dagegen verlagert sich der Einfluß des weißen Bauern stärken in Richtung der schwarzen Figuren. Die Entscheidung, was mit dem Königsbauern geschehen soll, muss nicht sofort fallen. Stattdessen kann Weiß diesen auch z.B. mit einem Springer decken und so den Angriff des schwarzen Damenbauern abwehren.

Bei der französischen Partie kann Schwarz leicht Schwierigkeiten bei der Endwicklung eines Läufers bekommen. Bei der folgenden Eröffnungsvariante tritt dieses Problem nicht auf.

17.4 Die Caro-Kann-Verteidigung

Auch bei der Caro-Kann-Verteidigung beginnt Weiß, indem er seinen Königsbauern um zwei Felder vorrückt. Schwarz bereitet analog zur französischen Partie das Vorrücken des Damenbauern vor. Allerdings tut er dies nun nicht mit seinem Königsbauern, sondern mit dem Bauern, der dem Damenbauern an einer anderen Seite benachbart ist. Er zieht diesen um ein Feld. Weiß zieht daraufhin wieder seinen Damenbauern um zwei Felder, Schwarz tut das gleiche. Da Schwarz seine Bauernfront weiter seitwärts geöffnet hat, kann er den bei der französischen Partie benachteiligten Läufer nun leichter entwickeln. Daneben hat Weiß durch die stärkere Asymmetrie in der Bauernstellung die Möglichkeit, einen Bauernabtausch ohne Remisverdacht durchzuführen. Wie bei der französischen Partie besteht auch hier die Möglichkeit, den Bauern zunächst zu decken und abzuwarten.

17.5 Die Sizilianische Partie

Wieder einmal beginnt Weiß die Partie mit einem Doppelschritt seines Königsbauern. Schwarz zieht daraufhin nicht den Königsbauern, sondern einen anderen dem Damenbauern benachbarten Bauern, um zwei Felder vor. Damit verhindert er den Doppelschritt des weißen Damenbauern, indem er dessen Zielfeld bedroht. Weiß sichert nun dieses Zielfeld, im Allgemeinen mit einem Springer. Darufhin sichert Schwarz seinen Bauern ab, indem er den Damenbauern um ein Feld vorrückt und ihn somit deckt. Weiß zieht nun seinen Damenbauern um zwei Felder auf das gerade gedeckte Feld. Schwarz schlägt diesen mit seinem im ersten Zug bewegten Bauern. Da das Feld von Weiß gedeckt ist, schlägt dieser nun seinerseits diesen Bauern. Schließlich greift Schwarz den nun einsamen weißen Königsbauern (mit seinem Springer) an, worauf Weiß diesem mit gleichen Mitteln verteidigt.

Nach diesen Zügen hat Schwarz im Zentrum einen Bauern mehr als Weiß. Dafür sind hat sich Weiß um ein Feld weiter nach vorn entwickelt. Es gibt nun verschiedene Varianten, die Partie fortzusetzen. Die hier dargestellten Fortsetzungen beziehen sich auf zweidimensionale Schachbretter. In Bezug auf die Feldbezeichnungen gelten die Konventionen, die im Kapitel über zweidimensionale Bretter angegeben sind. Bei höherdimensionalen Brettern fallen einige dieser Varianten zusammen, da die Abmessungen der Startaufstellung geringer sind. Dafür treten zusätzliche Fallunterscheidungen durch die höhere Anzahl an Raumrichtungen auf.

17.5.1 Das Drachensystem

Im Anschluss an die genannten Eröffnungszüge zieht Schwarz seinen g-Bauern um ein Feld vor. Weiß verstärkt seine Präsenz im Zentrum, indem er seine zentral platzierten Springer mit dem Läufer deckt. Schwarz flankiert nun seinen Läufer, zieht diesen also in die frühere Position des g-Bauern. Er deckt damit seinen Springer und bereitet gleichzeitig die kurze Rochade vor. Weiß baut seine Bauernkette aus, indem er den f-Bauern um ein Feld vorrückt. Schwarz führt nun die kurze Rochade durch. Weiß bereitet seinerseits die lange Rochade vor, indem er die Dame um ein Feld vorrückt. Dies ist wegen der Schwächung des Königsflügels durch den f-Bauernzug sinnvoller als eine kurze Rochade. Schwarz erhöht nun den Druck auf das Zentrum, indem er seinen zweiten Springer auf das Zentrum zu zieht. Weiß zieht darauf seinen zweiten Läufer zwischen den beiden Springern hindurch in eine Diagonale mit dem schwarzen König, die nur durch einen schwarzen Bauern unterbrochen wird. Schwarz deckt seinen Springer, indem er seinen zweiten Läufer vor die Dame zieht. Schließlich führt Weiß wie vorbereitet die lange Rochade durch.

17.5.2 Das Scheveninger System

Beim Scheveninger system setzt Schwarz die sizilianische Partie mit einem Einzelschritt des Königsbauern fort. Weiß eröffnet seinem Läufer den Weg, indem er ihn vor den König zieht. Damit bereitet er zugleich die kurze Rochade vor. Schwarz verstärkt nun seine Zentralpräsenz, indem er den zweiten Springer in Richtung Zentrum zieht. Weiß rochiert nun kurz, wie vorbereitet. Schwarz trifft die gleichen Vorbereitungen, indem auch er seinen Läufer vor den König zieht. Wieder deckt Weiß seinen zentralen Springer mit dem Läufer. Nun führt auch Schwarz die kurze Rochade durch. Schließlich zieht auch hier Weiß seinen f-Bauern um zwei Felder vorwärts.

17.5.3 Das Najdorfsystem

Schwarz setzt die Partie mit einem Einzelschritt des a-Bauern fort und bereitet damit den Doppelschritt des b-Bauern vor. Weiß zieht daraufhin seinen Läufer vor den König, um die kurze Rochade vorzubereiten. Schwarz greift in das Zentralgeschehen ein, indem er seinen Königsbauern um zwei Felder vorrückt. Weiß flüchtet mit seinem Springer aus dem Zentrum vor seine Bauernfront. Nun kann Schwarz seinen Läufer vor den König ziehen und so die kurze Rochade vorbereiten. Nachdem beide Spieler diese ausgeführt haben, zieht Weiß wie gewohnt seinen f-Bauern um zwei Felder vor.

17.6 Das Damengambit

Das Damengambit beginnt mit einem Doppelschritt des weißen Damenbauern. Schwarz tut nun seinerseits das gleiche. Weiß zieht nun einen Bauern, der dem Damenbauern benachbart ist, aber nicht den Königsbauern, um zwei Felder vor. Da das Zielfeld vom schwarzen Damenbauern bedroht wird, handelt es sich um ein Bauernopfer. Schwarz hat nun die Möglichkeit, den weißen Bauern zu schlagen und damit seinen eigenen Bauern aus dem Zentrum zu bewegen (das Gambit anzunehmen), oder seinen Bauern durch einen weiteren Bauernzug um ein Feld zu decken (das Gambit abzulehnen). Beim angenommenen Damengambit erkauft sich Weiß mit seinem Bauernopfer einen Entwicklungsvorsprung. Meist gelingt es ihm auch, den Bauern zurückzuerobern.

17.7 Die Englische (Bremer) Partie

Bei der englischen Partie beginnt Weiß so, wie Schwarz die sizilianische Partie übernimmt, nämlich durch den Doppelschritt eines Bauern, der dem Damenbauern benachbart ist. Schwarz zieht nun seinerseits den entsprechenden Bauern um ebenfalls zwei Felder vor. Die folgenden Züge sind nun völlig offen.

17.8 Indische Partien

17.8.1 Königsindisch

Bei einer königsindischen Partie beginnt Weiß mit dem Doppelschritt seines Damenbauern. Schwarz zieht nun seinen entfernteren Springer in Richtung Zentrum. Weiß baut seine Bauernfront aus und zieht den Nachbarn des Damenbauern, der dem Königsbauern gegenüber liegt. Schwarz zieht nun den Bauern, der sich vor dem bereits gezogenen Springer befand, um ein Feld vor. Weiß schützt nun das vom gegnerischen Springer bedrohte Feld mit seinem Springer, um den Doppelschritt des Königsbauern vorzubereiten. Darauf flankiert Schwarz einen Läufer, indem er ihn auf das Feld zieht, das sein Bauer soeben geräumt hat. Weiß zieht nun, wie gerade vorbereitet, seinen Königsbauern um zwei Felder vor. Schließlich zieht auch Schwarz seinen Damenbauern, allerdings nur um ein Feld.

Das Resultat ist zunächst verwunderlich: Während Weiß bereits ein mächtiges Bauernzentrum errichtet hat, bewegt sich Schwarz nur unmittelbar hinter sein Frontlinie. Die Kontrolle des Zentrums liegt hier offenbar klar im weißer Hand. Das wird sich jedoch schnell ändern, wenn Schwarz seinen Königsbauern oder einen anderen Nachbarn des Damenbauern um zwei Felder vorzieht. Dann wird das weiße, ungedeckte Bauernzentrum schnell brüchig und Schwarz kann sich mit seinen Figuren, die praktisch nur auf eine Gelegenheit warten, weit in die weiße Abwehr wagen. Wenn Weiß dies zu verhindern sucht, indem er Schwarz mit einem Vorstoss seines Königsbauern angreift, bekommt er die Tücken dieser Variante zu spüren. Dann nämlich wird Schwarz zuerst die Bauern und dann die Damen abtauschen. Die schwarze Dame muss Weiß mit dem gerade entwickelten Springer nehmen, da auf einen Königszug unweigerlich eine schwarze Springergabel folgen würde. Jetzt sieht die Lage schon ganz anders aus: Die weißen Figuren stehen komplett auf ihrer Grundlinie, während sich Schwarz weit ins Feld entwickelt hat und auch noch am Zug ist.

17.8.2 Damenindisch

Auch beim Damenindisch beginnt Weiß die Partie mit einem Doppelschritt des Damenbauern. Schwarz zieht - wie bereits zuvor - den entfernteren Springer in Richtung Zentrum. Weiß zieht den Bauern neben dem Damenbauern, der dem Königsbauern gegenüber liegt, um zwei Felder vor. Nun aber zieht Schwarz seinen Königsbauern um ein Feld vor. Weiß deckt nun seinen Damenbauern mit einem Springer. Schwarz zieht nun den Bauern, der vor dem anderen Springer steht, um ein Feld vor und zielt damit auf eine spätere Flankierung des entsprechenden Läufers. Mit seinem zweiten Springer deckt Weiß nun das Zentralfeld, auf das der Königsbauer mit einem Doppelschritt ziehen kann, um genau diesen Zug vorzubereiten. Nun verstärkt Schwarz seine Kontrolle über dieses Feld, indem er den schützenden Springer mit seinen Läufer echt fesselt. Weiß tut das gleiche, indem er den schwarzen Springer mit seinem Läufer unecht fesselt. Schwarz flankiert nun wie vorbereitet seinen Läufer und zielt damit auf den anderen Springer von Weiß und das davor liegende Zentralfeld. Dabei wechselt ständig die Kontrolle beider Spieler über dieses Feld.

17.8.3 Nimzowitsch-Indisch

Wie beim Damenindisch ist der zentrale Aspekt der Kampf um das Zentralfeld zwei Felder vor dem weißen Königsbauern. Dieses wird jedoch nicht sofort von Weiß besetzt. Stattdessen beginnt dieser die Partie mit einem Doppelschritt des Damenbauern. Wieder zieht Schwarz den entfernteren Springer in Richtung Zentrum. Schließlich zieht Weiß wieder den Bauern, der dem Königsbauern gegenüber liegt, um zwei Felder vor. Daraufhin zieht Schwarz seinen Königsbauern um ein Feld vor. Weiß deckt nun das bereits angesprochene Zentralfeld mit seinem Springer. Dieser wird von Schwarz mit einem Läufer echt gefesselt.

17.9 Orang-Utan

Die wohl ungewöhnlichste Eröffnung beginnt mit einem Doppelschritt eines Bauern abseits des Geschehens, der sich in der Startaufstellung vor einem Springer befindet. Diese ist hochspekulativ und im folgenden Verlauf absolut offen.

Kapitel 18

Besondere Eigenschaften einiger Bretter

18.1 Torusschach

Das Torusschachbrett besteht aus zwei Schachbrettern, deren erste und letzte Zeile überlappen. Zu Beginn der Partie sind diese durch die Figuren in der Startaufstellung voneinander getrennt. Jeder Spieler kann seine Figuren beliebig in das eine oder das andere Teilbrett ziehen, die zunächst unabhängig voneinander agieren. Wenn sich jedoch weniger Figuren in der Startaufstellung befinden, verhält sich das Brett verstärkt wie ein großes, geschlossenes Brett. Nun sind Züge zwischen beiden Hälften möglich und müssen vermehrt in Betracht gezogen werden.

Eine weitere Besonderheit des Torusschach besteht darin, dass ein Läufer alle Felder einer Farbe bedroht, wenn keine anderen Figuren im Weg stehen. Tatsächlich handelt es sich bei allen Diagonalen des Brettes (es gibt nur 4) um geschlossene Diagonalen mit einer Länge von 56 Feldern. An jedem Punkt kreuzen sich 2 davon.

18.2 Mehrdimensionale Bretter

Bei endlichdimensionalen Brettern mit mehr als zwei Dimensionen ist es schwieriger, den gegnerischen König mattzusetzen, da er wesentlich mehr Ausweichmöglichkeiten hat. Allgemein gibt es bei einem n-dimensionalen Brett bis zu $3^n - 1$ Felder, auf die ein König ziehen kann. Um den Gegner mattzusetzen, ist es daher ratsam, die Anzahl der Möglichkeiten dadurch einzuschränken, dass man den König an eine Kante oder in eine Ecke treibt. Die restlichen Felder müssen nun entweder besetzt oder bedroht sein. Dafür sind im allgemeinen mehr Figuren nötig als bei zweidimensionalen Varianten. Durch die geringere Figurendichte wird dieser Umstand noch verstärkt. Dadurch steigt die Länge einer Partie und auch die Wahrscheinlichkeit eines Remis.

Um diesem entgegenzuwirken, kann man auf Mehrparteien-Varianten zurückgreifen. Dadurch steigt die Figurendichte und die Partie wird spannender. Unter bestimmten Bedingungen kann dies sogar zu einer Art Gesellschaftsspiel führen, das jedoch auf dem hohen Niveau des Schachspiels stattfindet.

18.3 Das Unendlichkeitsaxiom

Bei Schachbrettern, bei denen das Unendlichkeitsaxiom von Bedeutung ist, haben Dame und König als einzige Figuren die Möglichkeit, entlang einer unendlichdimensionalen Diagonalen zu ziehen. Ein solcher Zug ist mit keiner anderen Figur in endlich vielen Schritten zu erreichen, sofern diese die frühere Position des Königs erreichen konnte. Die Figuren, die die neue Position des Königs erreichen können, befinden sich im allgemeinen noch in der Startaufstellung, da es nur endlich viele Figuren gibt, die bereits gezogen wurden. Daher kann der Gegner nicht ohne eine Dame mattgesetzt werden. Beim Gausskugelschach ist das nicht weiter schwierig, da es überabzählbar viele Damen gibt, die allerdings noch aus ihrer Startaufstellung gezogen werden müssen. Bei anderen unendlichdimensionalen Varianten gibt es jedoch nur eine Dame, deren Wert gegenüber den anderen Figuren größer ist als bei endlichdimesionalen Varianten. Der Verlust einer Dame muss durch die Umwandlung eines Bauern ausgeglichen werden. Um den Gegner effektiv mattzusetzen, ist sogar eine zweite Dame sinnvoll.

Teil IV

Mathematische Fragen

Kapitel 19

Stellungsprobleme

Zu jedem Brett kann man Aufgaben finden, die danach fragen, wie man eine feste Anzahl bestimmter Figuren auf dem Brett so unterbringen kann, dass bestimmte Annahmen erfüllt sind. Man kann z.B. fordern, dass sich die Figuren nicht gegenseitig bedrohen.

19.1 Springerprobleme

Die Tatsache, dass ein Springer nur Felder bedroht, die sich in einer anderen Läuferuntermenge befinden, ermöglicht es, alle Felder einer Läuferuntermenge mit Springern zu besetzen, die einander nicht bedrohen. Sinnvollerweise kann man die des zweidimensionalen Läufers benutzen, um die Hälfte der Felder zu besetzen.

19.2 Läuferprobleme

Da ein k-dimensionaler Läufer immer in seiner Untermenge bleibt, kann man diese Problem auf die 2^{k-1} Läuferuntermengen aufteilen. Die Läufer in einer Untermenge können unabhängig von den anderen Untermengen aufgestellt werden. Dabei können sich interessante Konsequenzen ergeben. So kann ein Läufer auf einem leeren Torusschachbrett alle Felder seiner Untermenge erreichen. Zwei Läufer in verschiedenen Untermengen bedrohen das gesamte Brett. Daher ist diese Variante als Mattproblem trivial.

19.3 Turmprobleme

Ein Turm bewegt sich stets entlang einer Raumrichtung. Beim Ziehen gibt es daher stets eine lineare Teilmenge, die das Startfeld und das Zielfeld umfasst. Wenn man die Türme nacheinander platziert, muss man jeden neuen Turm in eine lineare Teilmenge setzen, deren Felder noch keinen Turm beinhalten.

19.4 Damenprobleme

Die Dame vereinigt die Eigenschaften von Läufer und Turm. Sie bedroht Felder ausserhalb der Läuferuntermenge und der linearen Teilmenge, in der sie sich befindet. Daher ist es im allgemeinen schwieriger oder sogar unmöglich, genau so viele Damen auf ein Brett zu setzen, wie es bei den Türmen möglich ist. So kann man beim klassischen Schach 8 Damen aufstellen, wie man auch 8 Türme aufstellen kann. Auch beim Zylinderschach und beim Torusschach kann man je 8 Türme aufstellen, aber nur 7 bzw. nur 2 Damen. In beiden Fällen ist die Bedrohung über die Diagonalen entscheidend.

Kapitel 20

Springerrundlauf

In Brettern mit höchstens abzählbar vielen Feldern kann man einen Springer auf ein beliebiges Startfeld setzen und untersuchen, ob dieser dem Rösselsprung folgend alle Felder des Brettes nacheinander erreichen kann. Beim klassischen Schach ist ist dies immer der Fall. Wenn das Brett endlich ist, wie im klassischen Fall, kann man sogar verlangen, dass der Springer wieder auf sein Ausgangsfeld zurückkehrt. Auch dieser geschlossene Springerrundlauf ist beim klassischen Schach möglich. Bei geschlossenen Rundläufen spielt das Startfeld natürlich keine Rolle, da der Rundlauf eine zyklische Anordnung der Menge $\mathcal{B}$ erzeugt. Bei offenen Springerrundläufen ist dies anders, da dieser eine Anordnung mit einem ausgezeichneten (nämlich dem ersten) Feld erzeugt. Wenn die Anzahl der Felder endlich ist, gibt es auch ein Endfeld, das mit dem Startfeld gleichberechtigt ist. Bei endlichen Springerrundläufen ist daher die Richtung stets umkehrbar.

Wenn eine Zerlegung des Brettes in gleichmächtige, parallele, lineare Teilmengen existiert, kann dieser Springerrundlauf eine magische Struktur erzeugen. Wenn man jedem Feld die Nummer des Zuges zuordnet, bei dem der Springer auf dieses Feld zieht, so kann es Rundläufe geben, bei denen die Summe der Zugnummern aller Felder eine linearen Teilmenge konstant ist.

Kapitel 21

Brettzerlegungen

Da jedes Brett lokale Nachbarschaftsrelationen besitzt, kann man zusammenhängende Teilmengen A definieren:

$$\forall c_0, a \in A : \exists n \in \mathbb{N} : \exists (c_i \in A; i = 1, \ldots, n) : \exists (k_i \in \mathcal{I}^*, i = 1, \ldots, n+1) :$$

$$a \succ^{k_{n+1}} c_n \wedge \forall i \leq n : c_n \succ^{k_n} c_{n-1}$$

Nach diesem Prinzip kann man jedes Brett in zusammenhängende Teilmengen zerlegen. Man kann nun fordern, dass diese Teilmengen bestimmte geometrische Eigenschaften haben. So kann man z.B. die Anzahl der Felder festlegen oder die Dimension.

Teil V

Anhang

Anhang A

Schachmatische Fachbegriffe

Die benutzten Fachbegriffe, die der Mathematik entstammen oder im Sinne einer mathematischen Schachtheorie definiert wurden, werden mit folgenden Bedeutungen benutzt:

$\forall$ Allquantor. Der Ausdruck $\forall x \in X : P(x)$ bedeutet: *Für alle x aus X gilt P(x).*

$\exists$ Existenzquantor. Der Ausdruck $\exists x \in X : P(x)$ bedeutet: *Es gibt ein x aus X, für das P(x) gilt.*

$\exists!$ Existenzquantor. Der Ausdruck $\exists! x \in X : P(x)$ bedeutet: *Es gibt genau ein x aus X, für das P(x) gilt.*

γ_n s. symmetrische Gruppe

$\mathcal{B}$ s. Schachbrett

$\mathcal{F}$ s. Figurenmenge

$\mathcal{F}^*$ Menge aller beim Schach benutzten Figuren ohne das leere Feld.

$\mathcal{F}_g$ Menge aller Figuren des Spielers g.

$\mathcal{G}$ s. Gegnermenge

G_n s. Nachbarschaftsgraph

G_w s. Richtungswechselgraph

$\mathcal{I}$ s. Indexmenge

$\mathcal{L}$ Menge aller linearen Teilmengen.

$\mathcal{L}_k$ s. Richtungsmenge

$\mathbb{P}$ s. Potenzmenge

$\mathcal{S}$ s. Stellungsmenge

$\mathcal{Z}(s, g)$ s. Zugmenge

Äquivalenzrelation binäre Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Bauernassoziation Tatsache, dass die Laufrichtung aller Bauern eines Spielers die gleiche ist, sich aber von den Laufrichtungen der Bauern anderer Spieler unterscheidet.

bewerteter Graph Graph, bei dem jeder Kante eine reelle Zahl zugeordnet ist.

Brett s. Schachbrett

Figurenmenge Menge aller beim Schach benutzten Figuren inklusive des leeren Feldes.

Gegnermenge zyklisch angeordnete Menge aller an einer Partie teilnehmenden Spieler.

gerichtete Kante Kante eines Graphen, die durch ein geordnetes Paar von Knoten repräsentiert wird.

gerichteter Graph Graph, der nur gerichtete Kanten enthält.

gerichtetes Brett Schachbrett, dessen Geometrie durch globale Nachbarschaftsrelationen definiert werden kann.

globale Raumrichtung Raumrichtung in einem gerichteten Brett, deren Definition für alle Felder gültig ist.

Graph System aus einer Menge von Knoten und einer Menge von Kanten, die durch ein (geordnetes oder ungeordnetes) Paar von Knoten repräsentiert werden.

Indexmenge Menge der Indizes, die die Zerlegungen von $\mathcal{B}$ innerhalb von $\mathcal{L}$ kennzeichnen. Bei einem gerichteten Brett ist diese identisch mit der Menge der Raumrichtungen.

lineare Teilmenge Endliche, nichtleere, angeordnete Teilmenge eines Schachbretts. Es kann sich um eine geordnete oder zyklisch geordnete Menge handeln.

lokale Raumrichtung Raumrichtung, deren Definition stets nur für bestimmte Felder eines Schachbretts gültig ist.

Mehrfachkante System mehrerer Kanten eines Graphen mit identischen Endpunkten.

Nachbarschaftsgraph bewerteter, gerichteter Graph, der lokale Nachbarschaftsrelationen eines Schachbretts angibt.

Nachbarschaftsrelation Relation, die angibt, ob sich zwei Felder eines Schachbretts im schachlichen Sinne nebeneinander befinden.

parallele lineare Teilmengen lineare Teilmengen, die in der gleichen Richtungsmenge enthalten sind.

Permutation bijektive (eineindeutige) Zuordnung innerhalb einer endlichen Menge.

Potential Feldabhängige Größe, die nach Wahl eines Ausgangspunktes auf dem gesamten Brett eindeutig definiert ist.

Potenzmenge System von Mengen, das aus allen Teilmengen (auch die leere Menge) einer gegebenen Menge besteht.

primitive lineare Teilmenge lineare Teilmenge, die nur ein Element enthält.

Raumrichtung geometrische Eigenschaft, in welcher relativen Lage sich zwei benachbarte Felder befinden.

reflexive Relation binäre Relation R in einer Menge A, für die gilt: $\forall a \in A : (a, a) \in R$

Relation Eine n-stellige Relation R in einer Menge A ist gegeben durch $R \subseteq A^n$. Ist R eine binäre Relation, so ist $n = 2$.

Relationenprodukt Seien $R \subseteq A^2$ und $S \subseteq A^2$ binäre Relationen in A. Das Relationenprodukt ist gegeben durch $R \circ S = \{(a, c) | \exists b \in A : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$.

Richtungsmenge Zerlegung von $\mathcal{B}$, die gleichzeitig Teilmenge von $\mathcal{L}$ ist. Erlaubt die Definition lokaler Raumrichtungen.

Richtungswechsel Umkehr der lokalen Raumrichtungen zwischen benachbarten linearen Teilmengen.

Richtungswechselgraph bewerteter, ungerichteter Graph, der die Richtungswechsel eines Schachbretts angibt.

Schachbrett Menge $\mathcal{B}$ von Feldern mit festgelegter Geometrie. Jedes Feld besitzt Nachbarn, die durch die Geometrie des Brettes definiert sind. Diese Definition kann bei gerichteten Bretter durch Nachbarschaftsrelationen definiert sein. Allgemeingültig ist die Definition durch lineare Teilmengen.

schlichter Graph Graph, der keine Schlingen oder Mehrfachkanten besitzt.

Schlinge Kante eines Graphen, deren Endpunkte identisch sind.

Startaufstellung Stellung zu Beginn der Partie.

Stellung Zuordnung, die jedem Feld eines Brettes die darauf befindliche Figur zuordnet.

Stellungsmenge Menge aller auf einen Schachbrett erlaubten Stellungen.

symmetrische Gruppe Menge aller Permutationen in einer endlichen Teilmenge der natürlichen Zahlen.

symmetrische Relation binäre Relation R in einer Menge A, für die gilt: $\forall a, b \in A : ((a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R)$

transitive Relation binäre Relation R in einer Menge A, für die gilt: $\forall a, b, c \in A : ((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R)$

ungerichtete Kante Kante eines Graphen, die durch ein ungeordnetes Paar von Knoten repräsentiert wird.

ungerichteter Graph Graph, der nur ungerichtete Kanten enthält.

Zerlegung System von nichtleeren, paarweise elementfremden Teilmengen einer Menge A, deren Vereinigung die Menge A ist.

Zugmenge Menge aller bei einer bestimmten Stellung erlaubten Züge, wenn ein bestimmter Spieler am Zug ist.

zyklische lineare Teilmenge lineare Teilmenge, die zyklisch angeordnet ist.

Tabellenverzeichnis