

Geomeetriast Einsteini gravitatsiooniteooriani ja sealt edasi

Manuel Hohmann

Teoreetilise Füüsika Labor
Füüsika Instituut
Tartu Ülikool



1. september 2015

- 1 Üldrelatiivsusteooria
- 2 Vaatlused astronoomias ja kosmoloogias
- 3 Laiendatud teooriad
 - Skalaar-tensori teooriad
 - Multi-meetriline gravitatsiooniteooria
 - Teleparalleelne ja väändega teooriad
 - Finsleri ja Cartani geomeetriad
- 4 Kokkuvõte

- 1 Üldrelatiivsusteooria
- 2 Vaatlused astronoomias ja kosmoloogias
- 3 Laiendatud teooriad
 - Skalaar-tensori teooriad
 - Multi-meetriline gravitatsiooniteooria
 - Teleparalleelne ja väändega teooriad
 - Finsleri ja Cartani geomeetriad
- 4 Kokkuvõte

(Pseudo-)Riemanni geomeetria

- Aegruum: 4-mõõtmeline muutkond M .

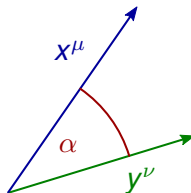
(Pseudo-)Riemanni geomeetria

- Aegruum: 4-mõõtmeline muutkond M .

- Riemanni meetrika $g_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu}x^\mu y^\nu = \|x\|\|y\|\cos\alpha.$$

- Vektorid x^μ, y^ν .
- Pikkused $\|x\|, \|y\|$.
- Nurk α .



(Pseudo-)Riemanni geomeetria

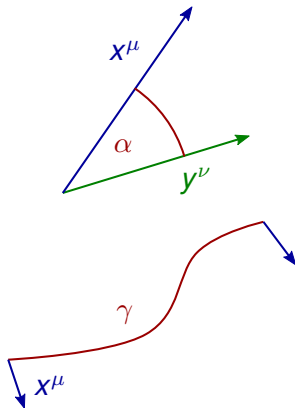
- Aegruum: 4-mõõtmeline muutkond M .

- Riemanni meetrika $g_{\mu\nu}$:
 $g_{\mu\nu}x^\mu y^\nu = \|x\| \|y\| \cos \alpha$.

- Vektorid x^μ, y^ν .
- Pikkused $\|x\|, \|y\|$.
- Nurk α .

- Levi-Civita seostus $\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(\partial_\nu g_{\rho\sigma} + \partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\rho})$.

- Kovariantne tuletis ∇_μ .
- Rööpülekanne: $0 = \nabla_\mu x^\nu$.



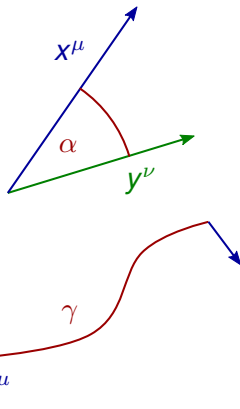
(Pseudo-)Riemanni geomeetria

- Aegruum: 4-mõõtmeline muutkond M .

- Riemanni meetrika $g_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = \|x\| \|y\| \cos \alpha.$$

- Vektorid x^μ, y^ν .
- Pikkused $\|x\|, \|y\|$.
- Nurk α .



- Levi-Civita seostus $\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\partial_\nu g_{\rho\sigma} + \partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\rho})$.

- Kovariantne tuletis ∇_μ .
- Rööpülekanne: $0 = \nabla_\mu x^\nu$.

- Riemanni kõverustensor:

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\rho} + \Gamma^\mu_{\omega\rho} \Gamma^\omega_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu_{\omega\sigma} \Gamma^\omega_{\nu\rho}.$$

- Ricci tensor: $R_{\mu\nu} = R^\rho_{\mu\rho\nu}$.
- Ricci skalaar: $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$.

- Dünaamiline gravitatsiooniväli: meetrika $g_{\mu\nu}$.

Einsteini üldrelatiivsusteooria

- Dünaamiline gravitatsiooniväli: meetrika $g_{\mu\nu}$.
- Dünaamika Einstein-Hilberti mõjufunktsionaalist:

$$S_G = \frac{1}{2} \int \sqrt{-\det g} R.$$

Einsteini üldrelatiivsusteooria

- Dünaamiline gravitatsiooniväli: meetrika $g_{\mu\nu}$.
- Dünaamika Einstein-Hilberti mõjufunktsionaalist:

$$S_G = \frac{1}{2} \int \sqrt{-\det g} R.$$

- Mateeria mõjufunktsionaal:

$$S_M = \int \sqrt{-\det g} \mathcal{L}_M.$$

Einsteini üldrelatiivsusteooria

- Dünaamiline gravitatsiooniväli: meetrika $g_{\mu\nu}$.
- Dünaamika Einstein-Hilberti mõjufunktsionaalist:

$$S_G = \frac{1}{2} \int \sqrt{-\det g} R.$$

- Materia mõjufunktsionaal:

$$S_M = \int \sqrt{-\det g} \mathcal{L}_M.$$

⇒ Väljavõrrandid: Einsteini võrrandid

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}.$$

- Einsteini tensor $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \Leftrightarrow$ geomeetria.
- Energia-impulsi tensor $T_{\mu\nu} \Leftrightarrow$ materia.

Ainepunkti trajektoorid

- Ainepunkti trajektoor $\gamma : \lambda \mapsto \gamma(\lambda) \in M$.
- Omaaeg: aeg τ , mida liikuv kell näitab:

$$\tau(\lambda_2) - \tau(\lambda_1) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{d\gamma^\mu}{d\lambda} \frac{d\gamma^\nu}{d\lambda}} d\lambda.$$

Ainepunkti trajektoorid

- Ainepunkti trajektoor $\gamma : \lambda \mapsto \gamma(\lambda) \in M$.
- Omaaeg: aeg τ , mida liikuv kell näitab:

$$\tau(\lambda_2) - \tau(\lambda_1) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{d\gamma^\mu}{d\lambda} \frac{d\gamma^\nu}{d\lambda}} d\lambda.$$

- Ainepunkti mõjufunktsionaal: $S[\gamma] \sim \tau$.

Ainepunkti trajektoorid

- Ainepunkti trajektoor $\gamma : \lambda \mapsto \gamma(\lambda) \in M$.
- Omaaeg: aeg τ , mida liikuv kell näitab:

$$\tau(\lambda_2) - \tau(\lambda_1) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{d\gamma^\mu}{d\lambda} \frac{d\gamma^\nu}{d\lambda}} d\lambda.$$

- Ainepunkti mõjufunktsionaal: $S[\gamma] \sim \tau$.

⇒ Liikumisvõrrandid:

$$\ddot{\gamma}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \dot{\gamma}^\nu \dot{\gamma}^\rho = 0.$$

⇔ Trajektoori puutujavektor on rööpülekanud:

$$\dot{\gamma}^\mu \nabla_\mu \dot{\gamma}^\nu = 0.$$

⇒ Trajektoor on **geodeetiline joon**.

- 1 Üldrelatiivsusteooria
- 2 Vaatlused astronoomias ja kosmoloogias
- 3 Laiendatud teooriad
 - Skalaar-tensori teooriad
 - Multi-meetriline gravitatsiooniteooria
 - Teleparalleelne ja väändega teooriad
 - Finsleri ja Cartani geomeetriad
- 4 Kokkuvõte

- Galaktikateparved:
 - Galaktikad parvedes liiguvad teiste gravitatsiooniväljas.
 - Galaktikate kiirused on suuremad, kui nähtav mass selgitab. $\neq$

Vaatlused universumi struktuuridest

- Galaktikateparved:
 - Galaktikad parvedes liiguvad teiste gravitatsiooniväljas.
 - Galaktikate kiirused on suuremad, kui nähtav mass selgitab. $\neq$
- Galaktikate pöördumine:
 - Punanihke mõõtmised näitavad, et galaktikad pöörduvad.
 - Galaktikate pöördumine on kiirem, kui nähtav mass selgitab. $\neq$

- Galaktikateparved:
 - Galaktikad parvedes liiguvad teiste gravitatsiooniväljas.
 - Galaktikate kiirused on suuremad, kui nähtav mass selgitab. $\neq$
- Galaktikate pöördumine:
 - Punanihke mõõtmised näitavad, et galaktikad pöörduvad.
 - Galaktikate pöördumine on kiirem, kui nähtav mass selgitab. $\neq$
- Gravitatsiooniläätsed:
 - Galaktikateparvede gravitatsioon kaldub valgust kõrvale.
 - Kõrvalekaldenurgad on suuremad, kui nähtav mass selgitab. $\neq$

Vaatlused universumi struktuuridest

- Galaktikateparved:
 - Galaktikad parvedes liiguvad teiste gravitatsiooniväljas.
 - Galaktikate kiirused on suuremad, kui nähtav mass selgitab. $\neq$
- Galaktikate pöördumine:
 - Punanihke mõõtmised näitavad, et galaktikad pöörduvad.
 - Galaktikate pöördumine on kiirem, kui nähtav mass selgitab. $\neq$
- Gravitatsiooniläätsed:
 - Galaktikateparvede gravitatsioon kaldub valgust kõrvale.
 - Kõrvalekaldenurgad on suuremad, kui nähtav mass selgitab. $\neq$
- Struktuuritekke:
 - Universumis on suured struktuurid - galaktikad, galaktikateparved.
 - Nähtav aine oli noores universumis liiga kuum. $\neq$

Vaatlused universumi struktuuridest

- Galaktikateparved:
 - Galaktikad parvedes liiguvad teiste gravitatsiooniväljas.
 - Galaktikate kiirused on suuremad, kui nähtav mass selgitab. ⚡
- Galaktikate pöördumine:
 - Punanihke mõõtmised näitavad, et galaktikad pöörduvad.
 - Galaktikate pöördumine on kiirem, kui nähtav mass selgitab. ⚡
- Gravitatsiooniläätsed:
 - Galaktikateparvede gravitatsioon kaldub valgust kõrvale.
 - Kõrvalekaldenurgad on suuremad, kui nähtav mass selgitab. ⚡
- Struktuuritekke:
 - Universumis on suured struktuurid - galaktikad, galaktikateparved.
 - Nähtav aine oli noores universumis liiga kuum. ⚡

⇒ Universumis on (näiliselt) rohkem ainet kui me näeme. ⚡

- Aine pole nähtav - seda nimetame **tumeaineks**.

Kosmoloogiline sümmeetria

- Invariantsus pöördumiste ja nihkete all.
- Invariantne meetrika: Roberson-Walkeri meetrika

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) \gamma_{ij} dx^i dx^j.$$

- Mastaabikordaja $a(t)$.
- Ruumiline meetrika γ_{ij} konstantse kõverusega $k \in \{-1, 0, 1\}$.
- Ruumiline Riemanni tensor $R(\gamma)_{ijkl} = 2k\gamma_{i[k}\gamma_{l]j}$.

Kosmoloogiline sümmeetria

- Invariantsus pöördumiste ja nihkete all.
- Invariantne meetrika: Roberson-Walkeri meetrika

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) \gamma_{ij} dx^i dx^j.$$

- Mastaabikordaja $a(t)$.
- Ruumiline meetrika γ_{ij} konstantse kõverusega $k \in \{-1, 0, 1\}$.
- Ruumiline Riemanni tensor $R(\gamma)_{ijkl} = 2k\gamma_{i[k}\gamma_{l]j}$.
- Materia: ideaalne vedelik

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}.$$

- Normeeritud 4-kiirus u^μ : $g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1$.
- Tihedus ρ .
- Rõhk p .

- Einsteini võrrandid & Roberson-Walkeri meetrika.

⇒ Friedmanni võrrandid:

$$\rho = 3 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) ,$$

$$p = - \left(2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) .$$

- Einsteini võrrandid & Roberson-Walkeri meetrika.

⇒ Friedmanni võrrandid:

$$\rho = 3 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) ,$$

$$p = - \left(2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) .$$

- Kiirendus:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6} (\rho + 3p) .$$

- Einsteini võrrandid & Roberson-Walkeri meetrika.

⇒ Friedmanni võrrandid:

$$\rho = 3 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) ,$$

$$p = - \left(2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) .$$

- Kiirendus:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6} (\rho + 3p) .$$

- Materia tüübid ja nende omadused:

- Tolm: $\rho > 0$, $p = 0$.
- Kiirgus: $\rho > 0$, $p = \frac{\rho}{3}$.

Kosmoloogiline dūnaamika

- Einsteini võrrandid & Roberson-Walkeri meetrika.

⇒ Friedmanni võrrandid:

$$\rho = 3 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) ,$$

$$p = - \left(2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) .$$

- Kiirendus:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6} (\rho + 3p) .$$

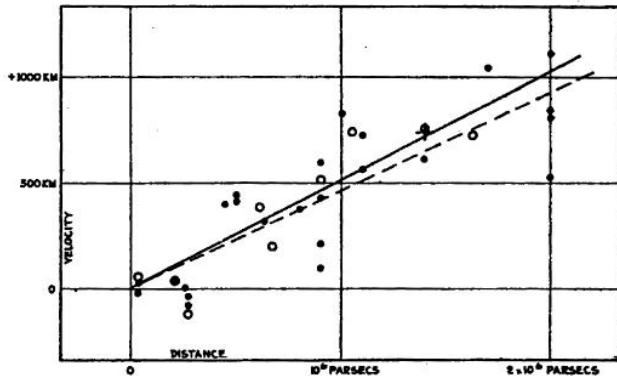
- Materia tüübid ja nende omadused:

- Tolm: $\rho > 0$, $p = 0$.
- Kiirgus: $\rho > 0$, $p = \frac{\rho}{3}$.

⇒ **Universum ei saa staatiline olla - paisumine aeglustub, $\ddot{a} < 0$.**

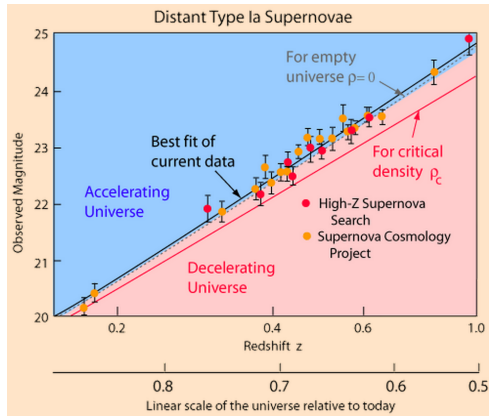
Universumi paisumine

- Universum paisub. ✓ [Hubble '29]



Universumi paisumine

- Universum paisub. ✓ [Hubble '29]
- Paisumise kiirendus on **positiivne!**
- **Universumi paisumine ei aeglustu, vaid kiireneb! ⚡**
- Me ei tea põhjust - aga ikkagi nimetame seda **tumeenergiaks**.



- 1 Üldrelatiivsusteooria
- 2 Vaatlused astronoomias ja kosmoloogias
- 3 Laiendatud teooriad
 - Skalaar-tensori teooriad
 - Multi-meetriline gravitatsiooniteooria
 - Teleparalleelne ja väändega teooriad
 - Finsleri ja Cartani geomeetriad
- 4 Kokkuvõte

- 1 Üldrelatiivsusteooria
- 2 Vaatlused astronoomias ja kosmoloogias
- 3 Laiendatud teooriad
 - Skalaar-tensori teooriad
 - Multi-meetriline gravitatsiooniteooria
 - Teleparalleelne ja väändega teooriad
 - Finsleri ja Cartani geomeetriad
- 4 Kokkuvõte

- Dünaamilised gravitatsiooniväljad: meetrika $g_{\mu\nu}$ ja skalaarväli ϕ .

Skalaar-tensori teooria põhimõisted

- Dünaamilised gravitatsiooniväljad: meetrika $g_{\mu\nu}$ ja skalaarväli ϕ .
- Gravitatsiooni mõjufunktsionaal: $S_G[g_{\mu\nu}, \phi]$.

Skalaar-tensori teooria põhimõisted

- Dünaamilised gravitatsiooniväljad: meetrika $g_{\mu\nu}$ ja skalaarväli ϕ .
- Gravitatsiooni mõjufunktsionaal: $S_G[g_{\mu\nu}, \phi]$.
- Väljavõrrandite struktuur:

- Meetrika võrrand:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}.$$

- Skalaarvälja võrrand:

$$\mathcal{E} = T^\mu{}_\mu.$$

- Liikmed $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ ja $\mathcal{E}$ sõltuvad meetrikast ja skalaarväljast.
- Skalaarvälja allikas on energia-impulsi tensori jälg.

- Mõjufunktsionaali struktuur:

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-\det g} \left\{ \mathcal{A}(\phi) R - \mathcal{B}(\phi) g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{2}{\ell^2} \mathcal{V}(\phi) \right\} \\ + S_m \left[e^{2\alpha(\phi)} g_{\mu\nu}, \chi \right] .$$

- Vabad funktsioonid $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{V}, \alpha$ skalaarväljast.

- Mõjufunktsionaali struktuur:

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-\det g} \left\{ \mathcal{A}(\phi) R - \mathcal{B}(\phi) g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{2}{\ell^2} \mathcal{V}(\phi) \right\} + S_m \left[e^{2\alpha(\phi)} g_{\mu\nu}, \chi \right].$$

- Vabad funktsioonid $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{V}, \alpha$ skalaarväljast.
- Mõjufunktsionaal on invariantne teisenduste all: [Järv, Kuusk, Saal, Vilson '14]

$$g_{\mu\nu} = e^{2\bar{\gamma}(\bar{\phi})} \bar{g}_{\mu\nu}, \quad \phi = \bar{f}(\bar{\phi}).$$

- Kokkusobivus vaatlustega sõltub ainult invariantidest $\mathcal{I}_i$.

Horndeski gravitatsiooniteooria

- Mõjufunktsionaali struktuur:

$$S_G = \sum_{i=2}^5 \int d^4x \sqrt{-\det g} \mathcal{L}_i[g_{\mu\nu}, \phi]$$

- Liikmed mõjufunktsionaalis ($X = -\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi / 2$):

$$\mathcal{L}_2 = K(\phi, X),$$

$$\mathcal{L}_3 = -G_3(\phi, X) \square \phi,$$

$$\mathcal{L}_4 = G_4(\phi, X) R + G_{4X}(\phi, X) \left[(\square \phi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)^2 \right],$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_5 = & G_5(\phi, X) G_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu \phi \\ & - \frac{1}{6} G_{5X}(\phi, X) \left[(\square \phi)^3 - 3(\square \phi)(\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)^2 + 2(\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)^3 \right]. \end{aligned}$$

- Vabad funktsioonid K, G_3, G_4, G_5 .

- Mõjufunktsionaali struktuur:

$$S_G = \sum_{i=2}^5 \int d^4x \sqrt{-\det g} \mathcal{L}_i[g_{\mu\nu}, \phi]$$

- Liikmed mõjufunktsionaalis ($X = -\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi / 2$):

$$\mathcal{L}_2 = K(\phi, X),$$

$$\mathcal{L}_3 = -G_3(\phi, X) \square \phi,$$

$$\mathcal{L}_4 = G_4(\phi, X) R + G_{4X}(\phi, X) \left[(\square \phi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)^2 \right],$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_5 = & G_5(\phi, X) G_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu \phi \\ & - \frac{1}{6} G_{5X}(\phi, X) \left[(\square \phi)^3 - 3(\square \phi)(\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)^2 + 2(\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)^3 \right]. \end{aligned}$$

- Vabad funktsioonid K , G_3 , G_4 , G_5 .

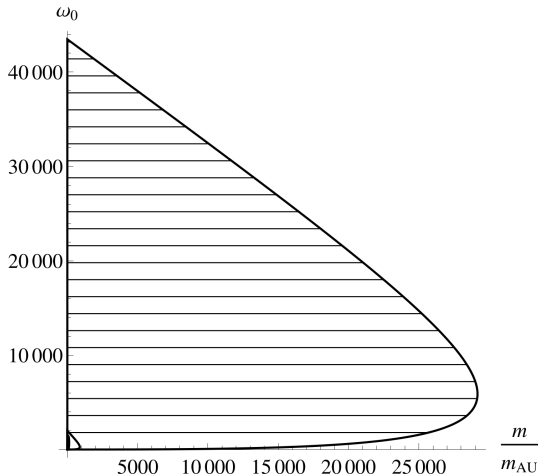
⇒ Väljavõrrandid: kõige üldisemad teist järku diferentsiaalvõrrandid.

Kokkusobivus vaatlustega päikesesüsteemis

- Parameetrid: skalaarvälja mass m , sideparameeter ω_0 .

Kokkusobivus vaatlustega päikesesüsteemis

- Parameetrid: skalaarvälja mass m , sideparameeter ω_0 .
- Eksperimentaalselt välistatud parameetri ala:



- Kõrgemat järku väljavõrrandid:
 - Võimalik probleem: Ostrogradsky ebastabiilsus / vaimuväljad. $\nexists$
 - Leiti “terveid” teooriaid. $\checkmark$

- Kõrgemat järku väljavõrrandid:
 - Võimalik probleem: Ostrogradsky ebastabiilsus / vaimuväljad. $\nexists$
 - Leiti “terveid” teooriaid. $\checkmark$
- Mitme skalaarväljaga teooriad:
 - Jordan-Brans-Dicke üldistus:

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-\det g} \left\{ \mathcal{A}(\vec{\phi}) R - \mathcal{B}_{IJ}(\vec{\phi}) g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi^I \nabla_\nu \phi^J - \frac{2}{\ell^2} \mathcal{V}(\vec{\phi}) \right\} \\ + S_m \left[e^{2\alpha(\vec{\phi})} g_{\mu\nu}, \chi \right] .$$

- Sarnaselt üldistatud Horndeski teooria.

- Kõrgemat järku väljavõrrandid:
 - Võimalik probleem: Ostrogradsky ebastabiilsus / vaimuväljad. $\nexists$
 - Leiti “terveid” teooriaid. $\checkmark$
- Mitme skalaarväljaga teooriad:
 - Jordan-Brans-Dicke üldistus:

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-\det g} \left\{ \mathcal{A}(\vec{\phi}) R - \mathcal{B}_{IJ}(\vec{\phi}) g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi^I \nabla_\nu \phi^J - \frac{2}{\ell^2} \mathcal{V}(\vec{\phi}) \right\} \\ + S_m \left[e^{2\alpha(\vec{\phi})} g_{\mu\nu}, \chi \right] .$$

- Sarnaselt üldistatud Horndeski teooria.

⇒ Suur “teooriatemaastik”, mida tuleb uurida.

- Kokkusobivus vaatlustega päikesesüsteemis?
- Kosmoloogiline dünaamika?

- 1 Üldrelatiivsusteooria
- 2 Vaatlused astronoomias ja kosmoloogias
- 3 Laiendatud teooriad
 - Skalaar-tensori teooriad
 - **Multi-meetriline gravitatsiooniteooria**
 - Teleparalleelne ja väändega teooriad
 - Finsleri ja Cartani geomeetriad
- 4 Kokkuvõte

- Üldrelatiivsusteoorias:
 - Nähtav aine: standardmudeli väljad Ψ .
 - Meetrika $g_{\mu\nu}$ valitseb aine liikumist.

Multi-meetrilise teooria põhimõisted

- Üldrelatiivsusteoorias:
 - Nähtav aine: standardmudeli väljad ψ^1 .
 - Meetrika $g_{\mu\nu}^1$ valitseb aine liikumist.
- Multi-meetrilises gravitatsiooniteoorias lisaks:
 - Tumedad standardmudeli koopiad $\psi^2, \dots, \psi^N$.
 - Igal koopial on oma meetrika $g_{\mu\nu}^2, \dots, g_{\mu\nu}^N$, mis liikumist valitseb.

Multi-meetrilise teooria põhimõisted

- Üldrelatiivsusteoorias:
 - Nähtav aine: standardmudeli väljad ψ^1 .
 - Meetrika $g_{\mu\nu}^1$ valitseb aine liikumist.
- Multi-meetrilises gravitatsiooniteoorias lisaks:
 - Tumedad standardmudeli koopiad $\psi^2, \dots, \psi^N$.
 - Igal koopial on oma meetrika $g_{\mu\nu}^2, \dots, g_{\mu\nu}^N$, mis liikumist valitseb.
- Mõjufunktsionaali struktuur:

$$S = S_G[g_{\mu\nu}^1, \dots, g_{\mu\nu}^N] + \sum_{I=1}^N S_M[\psi^I, g_{\mu\nu}^I].$$

Multi-meetrilise teooria põhimõisted

- Üldrelatiivsusteoorias:
 - Nähtav aine: standardmudeli väljad ψ^1 .
 - Meetrika $g_{\mu\nu}^1$ valitseb aine liikumist.
- Multi-meetrilises gravitatsiooniteoorias lisaks:
 - Tumedad standardmudeli koopiad $\psi^2, \dots, \psi^N$.
 - Igal koopial on oma meetrika $g_{\mu\nu}^2, \dots, g_{\mu\nu}^N$, mis liikumist valitseb.
- Mõjufunktsionaali struktuur:

$$S = S_G[g_{\mu\nu}^1, \dots, g_{\mu\nu}^N] + \sum_{I=1}^N S_M[\psi^I, g_{\mu\nu}^I].$$

⇒ Ainus vastasmõju erinevate koopiate vahel on gravitatsioon.

- Gravitatsioonijõud erinevate koopiate vahel on eemaletõmmatav.

- Kosmoloogiline sümmeetria ja Kopernikuse printsiip:

$$g_{\mu\nu}^1 dx^\mu dx^\nu = \dots = g_{\mu\nu}^N dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) \gamma_{ij} dx^i dx^j .$$

Multi-meetriline kosmoloogia

- Kosmoloogiline sümmeetria ja Kopernikuse printsiip:

$$g_{\mu\nu}^1 dx^\mu dx^\nu = \dots = g_{\mu\nu}^N dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) \gamma_{ij} dx^i dx^j .$$

⇒ Modifitseeritud Friedmanni võrrandid:

$$\rho = \frac{3}{2 - N} \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) ,$$

$$p = -\frac{1}{2 - N} \left(2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) .$$

Multi-meetriline kosmoloogia

- Kosmoloogiline sümmeetria ja Kopernikuse printsiip:

$$g_{\mu\nu}^1 dx^\mu dx^\nu = \dots = g_{\mu\nu}^N dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) \gamma_{ij} dx^i dx^j .$$

⇒ Modifitseeritud Friedmanni võrrandid:

$$\rho = \frac{3}{2-N} \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) ,$$
$$p = -\frac{1}{2-N} \left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) .$$

⇒ Kiirendus:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{N-2}{6} (\rho + 3p) .$$

⇒ Universumi paisumine kiireneb, kui $N > 2$. ✓

Multi-meetriline kosmoloogia

- Kosmoloogiline sümmeetria ja Kopernikuse printsiip:

$$g_{\mu\nu}^1 dx^\mu dx^\nu = \dots = g_{\mu\nu}^N dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) \gamma_{ij} dx^i dx^j .$$

⇒ Modifitseeritud Friedmanni võrrandid:

$$\rho = \frac{3}{2-N} \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) ,$$
$$p = -\frac{1}{2-N} \left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) .$$

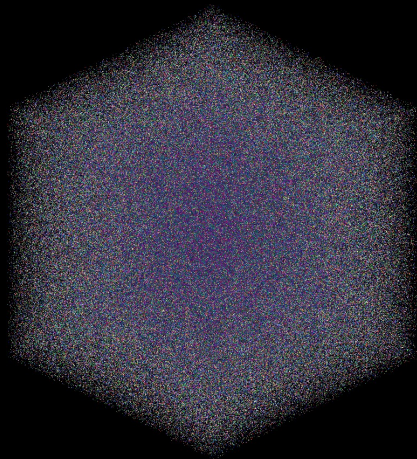
⇒ Kiirendus:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{N-2}{6} (\rho + 3p) .$$

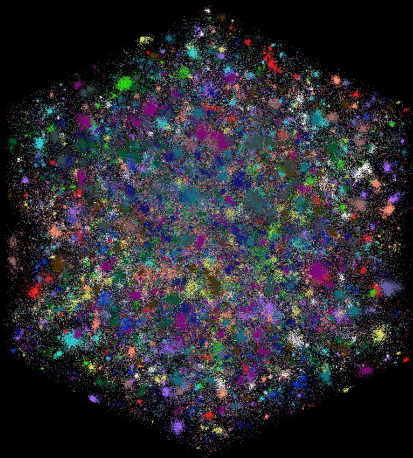
⇒ Universumi paisumine kiireneb, kui $N > 2$. ✓

- Seni vastamata küsimus: Kas lahendus on stabiilne?

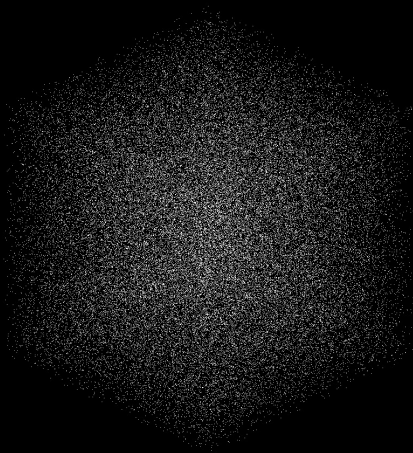
Struktuuritekke - kõik mateeriatüübid



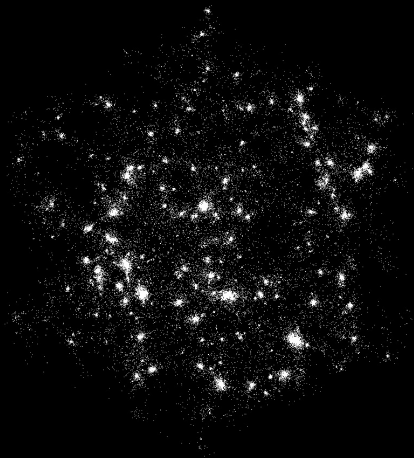
Struktuuritekke - kõik mateeriatüübid



Struktuuritekke - ainult nähtav mateeria

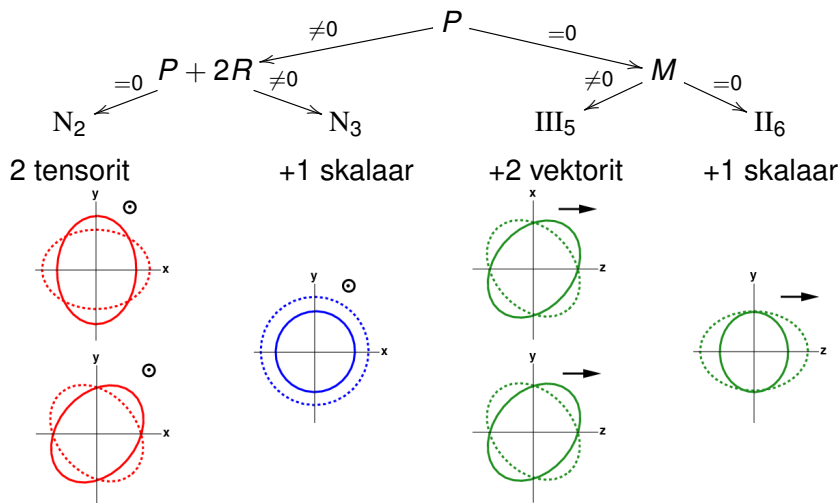


Struktuuritekke - ainult nähtav materia



Gravitatsioonilained

- Lainete polarisatsioonid on eukleidilise rühma $E(2)$ esitused.
- $E(2)$ klass sõltub teooria parameetridest P, R, M .



- 1 Üldrelatiivsusteooria
- 2 Vaatlused astronoomias ja kosmoloogias
- 3 Laiendatud teooriad
 - Skalaar-tensori teooriad
 - Multi-meetriline gravitatsiooniteooria
 - **Teleparalleelne ja väändega teooriad**
 - Finsleri ja Cartani geomeetriad
- 4 Kokkuvõte

- Levi-Civita seostus $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$:
 - Ilma väändeta: $\Gamma^\mu_{\rho\nu} - \Gamma^\mu_{\nu\rho} = 0$.
 - Meetrikaga kokkusobiv: $\nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0$.

Vääne ja väändega seostus

- Levi-Civita seostus $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$:
 - Ilma väändeta: $\Gamma^\mu_{\rho\nu} - \Gamma^\mu_{\nu\rho} = 0$.
 - Meetrikaga kokkusobiv: $\nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0$.
- Üldine meetrikaga kokkusobiv seostus $\tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\rho}$:
 - Väändetensor: $\tilde{\Gamma}^\mu_{\rho\nu} - \tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\rho} = T^\mu_{\nu\rho} \neq 0$.
 - Meetrikaga kokkusobiv: $\tilde{\nabla}_\mu g_{\nu\rho} = 0$.

Vääne ja väändega seostus

- Levi-Civita seostus $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$:
 - Ilma väändeta: $\Gamma^\mu_{\rho\nu} - \Gamma^\mu_{\nu\rho} = 0$.
 - Meetrikaga kokkusobiv: $\nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0$.
- Üldine meetrikaga kokkusobiv seostus $\tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\rho}$:
 - Väändetensor: $\tilde{\Gamma}^\mu_{\rho\nu} - \tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\rho} = T^\mu_{\nu\rho} \neq 0$.
 - Meetrikaga kokkusobiv: $\tilde{\nabla}_\mu g_{\nu\rho} = 0$.
- Väändega seostuse puhul kovariantsed tuletised ei kommuteeru:

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

- Samas ei kommuteeru rööpülekanDED.

- Dünaamiline gravitatsiooniväli: tetraad e_m^μ .

Teleparalleelne gravitatsiooniteooria

- Dünaamiline gravitatsiooniväli: tetraad e_m^μ .
- Meetrika: $g_{\mu\nu} = \eta_{mn} e_\mu^m e_\nu^n$.

Teleparalleelne gravitatsiooniteooria

- Dünaamiline gravitatsiooniväli: tetraad e_m^μ .
- Meetrika: $g_{\mu\nu} = \eta_{mn} e_\mu^m e_\nu^n$.
- Weizenböcki seostus: $\tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\rho} = e_m^\mu \partial_\rho e_\nu^m$.
 - Seostus on väändega: $T^\mu_{\nu\rho} \neq 0$.
 - Seostus on kõveruseta: $R^\mu_{\nu\rho\sigma} = 0$.

⇒ Rööpülekanne ei sõltu trajektoorist: “teleparalleelsus”.

Teleparalleelne gravitatsiooniteooria

- Dünaamiline gravitatsiooniväli: tetraad e_m^μ .
- Meetrika: $g_{\mu\nu} = \eta_{mn} e_\mu^m e_\nu^n$.
- Weizenböcki seostus: $\tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\rho} = e_m^\mu \partial_\rho e_\nu^m$.
 - Seostus on väändega: $T^\mu_{\nu\rho} \neq 0$.
 - Seostus on kõveruseta: $R^\mu_{\nu\rho\sigma} = 0$. $\Rightarrow$ Rööpülekanne ei sõltu trajektoorist: “teleparalleelsus”.
- Mõjufunktsionaal:

$$S_G = \frac{1}{2} \int \det e \left(\frac{1}{4} T^\rho_{\mu\nu} T^\mu_{\rho}{}^{\nu} + \frac{1}{2} T^\rho_{\mu\nu} T^{\nu\mu}{}_{\rho} - T^\rho_{\mu\rho} T^{\nu\mu}{}_{\nu} \right) .$$

Teleparalleelne gravitatsiooniteooria

- Dünaamiline gravitatsiooniväli: tetraad e_m^μ .
- Meetrika: $g_{\mu\nu} = \eta_{mn} e_\mu^m e_\nu^n$.
- Weizenböcki seostus: $\tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\rho} = e_m^\mu \partial_\rho e_\nu^m$.
 - Seostus on väändega: $T^\mu_{\nu\rho} \neq 0$.
 - Seostus on kõveruseta: $R^\mu_{\nu\rho\sigma} = 0$. $\Rightarrow$ Rööpülekanne ei sõltu trajektoorist: “teleparalleelsus”.
- Mõjufunktsionaal:

$$S_G = \frac{1}{2} \int \det e \left(\frac{1}{4} T^\rho_{\mu\nu} T_\rho^{\mu\nu} + \frac{1}{2} T^\rho_{\mu\nu} T^{\nu\mu}_\rho - T^\rho_{\mu\rho} T^{\nu\mu}_\nu \right).$$

$\Rightarrow$ Väljavõrrandite struktuur:

$$\partial_\sigma (\det e S_m^{\rho\sigma}) - \det e j_m^\rho = \det e \Theta_m^\rho.$$

Teleparalleelne gravitatsiooniteooria

- Dünaamiline gravitatsiooniväli: tetraad e_m^μ .
- Meetrika: $g_{\mu\nu} = \eta_{mn} e_\mu^m e_\nu^n$.
- Weizenböcki seostus: $\tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\rho} = e_m^\mu \partial_\rho e_\nu^m$.
 - Seostus on väändega: $T^\mu_{\nu\rho} \neq 0$.
 - Seostus on kõveruseta: $R^\mu_{\nu\rho\sigma} = 0$. $\Rightarrow$ Rööpülekanne ei sõltu trajektoorist: “teleparalleelsus”.
- Mõjufunktsionaal:

$$S_G = \frac{1}{2} \int \det e \left(\frac{1}{4} T^\rho_{\mu\nu} T_\rho^{\mu\nu} + \frac{1}{2} T^\rho_{\mu\nu} T^{\nu\mu}_\rho - T^\rho_{\mu\rho} T^{\nu\mu}_\nu \right).$$

$\Rightarrow$ Väljavõrrandite struktuur:

$$\partial_\sigma (\det e S_m^{\rho\sigma}) - \det e j_m^\rho = \det e \Theta_m^\rho.$$

- Teooria on üldrelatiivsusteooriaga ekvivalentne.

- Võimalikud muutused:
 - Kõrgemat järku liikmed: T^4 , $T^2 \nabla T$, ...
 - Lisaväljad: skalaarväli ϕ , ...
 - Väände ja kõverusega teooriad: Einstein-Cartan, ...

- Võimalikud muutused:
 - Kõrgemat järku liikmed: T^4 , $T^2 \nabla T$, ...
 - Lisaväljad: skalaarväli ϕ , ...
 - Väände ja kõverusega teooriad: Einstein-Cartan, ...
- Võimalikud teemad, mida tuleb uurida:
 - Invariantsus lokaalsete Lorentzi teisenduste all.
 - Ostrogradsky ebastabiilsus / vaimuväljad.
 - Kokkusobivus vaatlustega päikesesüsteemis.
 - Kosmoloogiline dünaamika.
 - Ekvivalentsus teiste teooriatega: $f(R)$, STG, Gauss-Bonnet, ...

- 1 Üldrelatiivsusteooria
- 2 Vaatlused astronoomias ja kosmoloogias
- 3 **Laiendatud teooriad**
 - Skalaar-tensori teooriad
 - Multi-meetriline gravitatsiooniteooria
 - Teleparalleelne ja väändega teooriad
 - Finsleri ja Cartani geomeetriad
- 4 Kokkuvõte

- Üldistatud trajektoori γ pikkuse funktsionaal:

$$\tau(\lambda_2) - \tau(\lambda_1) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F(\gamma(\lambda), \dot{\gamma}(\lambda)) d\lambda.$$

- Finsleri funktsioon $F : TM \rightarrow \mathbb{R}^+$.
- Invariantsus parameetri teisenduste all vajab homogeensust:

$$F(x, cy) = cF(x, y) \quad \forall c > 0.$$

- Üldistatud trajektoori γ pikkuse funktsionaal:

$$\tau(\lambda_2) - \tau(\lambda_1) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F(\gamma(\lambda), \dot{\gamma}(\lambda)) d\lambda.$$

- Finsleri funktsioon $F : TM \rightarrow \mathbb{R}^+$.
- Invariantsus parameetri teisenduste all vajab homogeensust:

$$F(x, cy) = cF(x, y) \quad \forall c > 0.$$

⇒ Finsleri meetrika:

$$g_{\mu\nu}^F(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu} F^2(x, y).$$

- Dünaamiline gravitatsiooniväli: Finsleri funktsioon F .

Finsleri gravitatsiooniteooria

- Dünaamiline gravitatsiooniväli: Finsleri funktsioon F .
- Gravitatsiooni mõjufunktsionaal:

$$S_G = \frac{1}{\kappa} \int_{\Sigma} \text{Vol}_{\tilde{G}} R^{\mu}_{\mu\nu} y^{\nu}.$$

Finsleri gravitatsiooniteooria

- Dünaamiline gravitatsiooniväli: Finsleri funktsioon F .
- Gravitatsiooni mõjufunktsionaal:

$$S_G = \frac{1}{\kappa} \int_{\Sigma} \text{Vol}_{\tilde{G}} R^{\mu}_{\mu\nu} y^{\nu}.$$

- Väljavõrrandid:

$$\left[g^{F\mu\nu} \bar{\partial}_{\mu} \bar{\partial}_{\nu} (R^{\rho}_{\rho\sigma} y^{\sigma}) - 6 \frac{R^{\mu}_{\mu\nu} y^{\nu}}{F^2} + 2g^{F\mu\nu} (\nabla_{\mu} S_{\nu} + S_{\mu} S_{\nu} + \bar{\partial}_{\mu} (y^{\rho} \delta_{\rho} S_{\nu} - N^{\rho}_{\nu} S_{\rho})) \right] \Big|_{\Sigma} = \kappa T|_{\Sigma}$$

Finsleri gravitatsiooniteooria

- Dünaamiline gravitatsiooniväli: Finsleri funktsioon F .
- Gravitatsiooni mõjufunktsionaal:

$$S_G = \frac{1}{\kappa} \int_{\Sigma} \text{Vol}_{\tilde{G}} R^{\mu}_{\mu\nu} y^{\nu}.$$

- Väljavõrrandid:

$$\left[g^{F\mu\nu} \bar{\partial}_{\mu} \bar{\partial}_{\nu} (R^{\rho}_{\rho\sigma} y^{\sigma}) - 6 \frac{R^{\mu}_{\mu\nu} y^{\nu}}{F^2} + 2g^{F\mu\nu} (\nabla_{\mu} S_{\nu} + S_{\mu} S_{\nu} + \bar{\partial}_{\mu} (y^{\rho} \delta_{\rho} S_{\nu} - N^{\rho}_{\nu} S_{\rho})) \right] \Big|_{\Sigma} = \kappa T|_{\Sigma}$$

- Geomeetria pool veidi keerulisem kui üldrelatiivsusteoorias.

Finsleri gravitatsiooniteooria

- Dünaamiline gravitatsiooniväli: Finsleri funktsioon F .
- Gravitatsiooni mõjufunktsionaal:

$$S_G = \frac{1}{\kappa} \int_{\Sigma} \text{Vol}_{\tilde{G}} R^{\mu}_{\mu\nu} y^{\nu}.$$

- Väljavõrrandid:

$$\left[g^{F\mu\nu} \bar{\partial}_{\mu} \bar{\partial}_{\nu} (R^{\rho}_{\rho\sigma} y^{\sigma}) - 6 \frac{R^{\mu}_{\mu\nu} y^{\nu}}{F^2} + 2g^{F\mu\nu} (\nabla_{\mu} S_{\nu} + S_{\mu} S_{\nu} + \bar{\partial}_{\mu} (y^{\rho} \delta_{\rho} S_{\nu} - N^{\rho}_{\nu} S_{\rho})) \right] \Big|_{\Sigma} = \kappa T|_{\Sigma}$$

- Geomeetria pool veidi keerulisem kui üldrelatiivsusteoorias.
- Aga aine pool on lihtsam.

Ainepunkti trajektooriid

- Mõjufunktsionaal on trajektoori pikkuse funktsionaal.

⇒ Liikumisvõrrandid:

$$\ddot{\gamma}^{\mu} + N^{\mu}{}_{\nu} \dot{\gamma}^{\nu} = 0.$$

- $N^{\mu}{}_{\nu}$ on Cartani **mittelineaarne** seostus.

Ainepunkti trajektooriid

- Mõjufunktsionaal on trajektoori pikkuse funktsionaal.

⇒ Liikumisvõrrandid:

$$\ddot{\gamma}^{\mu} + N^{\mu}_{\nu} \dot{\gamma}^{\nu} = 0.$$

- N^{μ}_{ν} on Cartani mittelineaarne seostus.
- Trajektoor “tõuseb” kanooniliselt puutujatekihtkonnale TM :

$$\Gamma^{\mu} = \gamma^{\mu}, \quad \bar{\Gamma}^{\mu} = \dot{\gamma}^{\mu}.$$

- Samas tõusevad liikumisvõrrandid:

$$\dot{\Gamma}^{\mu} = \bar{\Gamma}^{\mu}, \quad \dot{\bar{\Gamma}}^{\mu} = -N^{\mu}_{\nu} \bar{\Gamma}^{\nu}.$$

Ainepunkti trajektooriid

- Mõjufunktsionaal on trajektoori pikkuse funktsionaal.

⇒ Liikumisvõrrandid:

$$\ddot{\gamma}^{\mu} + N^{\mu}_{\nu} \dot{\gamma}^{\nu} = 0.$$

- N^{μ}_{ν} on Cartani mittelineaarne seostus.
- Trajektoor “tõuseb” kanooniliselt puutujatekihtkonnale TM :

$$\Gamma^{\mu} = \gamma^{\mu}, \quad \bar{\Gamma}^{\mu} = \dot{\gamma}^{\mu}.$$

- Samas tõusevad liikumisvõrrandid:

$$\dot{\Gamma}^{\mu} = \bar{\Gamma}^{\mu}, \quad \dot{\bar{\Gamma}}^{\mu} = -N^{\mu}_{\nu} \bar{\Gamma}^{\nu}.$$

⇒ Geodeetilised jooned on vektorvälja integraaljooned:

$$y^a \partial_a - y^b N^a_b \bar{\partial}_a = \mathbf{S}.$$

- Vektorvälja $\mathbf{S}$ nimetatakse **geodeetiliseks pihuseks**.

- Finsleri pikkus eraldab ühikvektoreid $y \in T_x M$:

$$F^2(x, y) = g_{\mu\nu}^F(x, y) y^\mu y^\nu = 1 .$$

⇒ Ühikvektorite hulk $\Omega_x \subset T_x M$ igas ae ruumi punktis $x \in M$.

- Finsleri pikkus eraldab ühikvektoreid $y \in T_x M$:

$$F^2(x, y) = g_{\mu\nu}^F(x, y) y^\mu y^\nu = 1.$$

⇒ Ühikvektorite hulk $\Omega_x \subset T_x M$ igas ae ruumi punktis $x \in M$.

- Ω_x sisaldab tulevikusuunaliste vektorite alamhulka $S_x \subseteq \Omega_x$.

⇒ Kausaalsus: S_x on füüsikaliste 4-kiiruste ruum.

- Finsleri pikkus eraldab ühikvektoreid $y \in T_x M$:

$$F^2(x, y) = g_{\mu\nu}^F(x, y) y^\mu y^\nu = 1.$$

⇒ Ühikvektorite hulk $\Omega_x \subset T_x M$ igas aegruumi punktis $x \in M$.

- Ω_x sisaldab tulevikusuunaliste vektorite alamhulka $S_x \subseteq \Omega_x$.

⇒ Kausaalsus: S_x on füüsikaliste 4-kiiruste ruum.

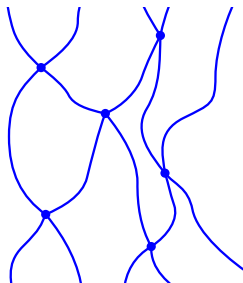
- Vaatajate ruum:

$$O = \bigcup_{x \in M} S_x.$$

⇒ $O \subset TM$ on 7-mõõtmeline alammuutkond.

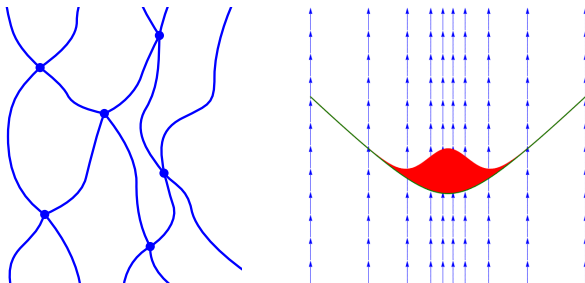
- Füüsikaline trajektoor:
 - Trajektoori kanooniline tõus Γ vaatajate ruumis.
 - Γ on vektorvälja $\mathbf{r} = \mathbf{S}|_O$ integraaljoon.

- Füüsikaline trajektoor:
 - Trajektoori kanooniline tõus Γ vaatajate ruumis.
 - Γ on vektorvälja $\mathbf{r} = \mathbf{S}|_O$ integraaljoon.
- Vedelik koosneb osakestest / ainepunktidest:
 - Ainepunktid liiguvad geodeetilistel trajektoorigil.
 - Ainus vastasmõju ainepunktide vahel: instantaanne kokkupõrge.



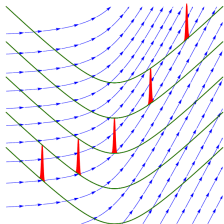
Vedelikudünaamika

- Füüsikaline trajektoor:
 - Trajektoori kanooniline tõus Γ vaatajate ruumis.
 - Γ on vektorvälja $\mathbf{r} = \mathbf{S}|_O$ integraaljoon.
- Vedelik koosneb osakestest / ainepunktidest:
 - Ainepunktid liiguvad geodeetilistel trajektoorigel.
 - Ainus vastasmõju ainepunktide vahel: instantaanne kokkupõrge.
- Kontiinumi piir:
 - Ainepunktide tihedus: $\phi : O \rightarrow \mathbb{R}^+$.
 - Liikumisvõrrand ilma kokkupõrgeteta: $\mathcal{L}_r \phi = 0$.



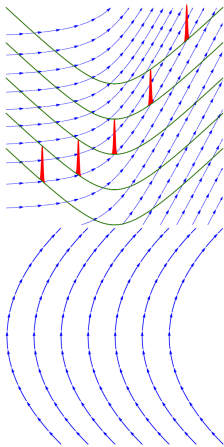
Geodeetiline tolm:

$$\phi(x, y) \sim \delta(y - u(x)) .$$



Geodeetiline tolm:

$$\phi(x, y) \sim \delta(y - u(x)) .$$

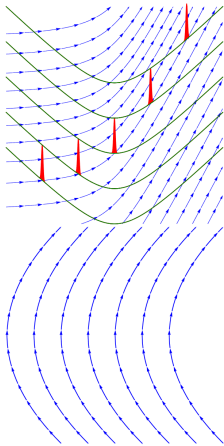


“Jenka”

Vedelikutüübid

Geodeetiline tolm:

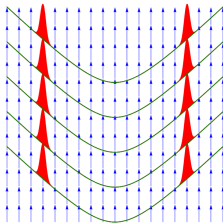
$$\phi(x, y) \sim \delta(y - u(x)) .$$



“Jenka”

Kokkupõrgeteta v.:

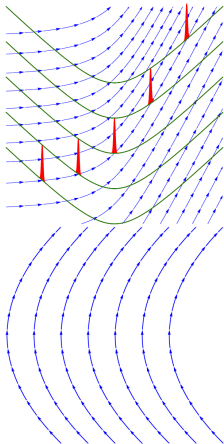
$$\mathcal{L}_{\mathbf{r}}\phi = 0 .$$



Vedelikutüübid

Geodeetiline tolm:

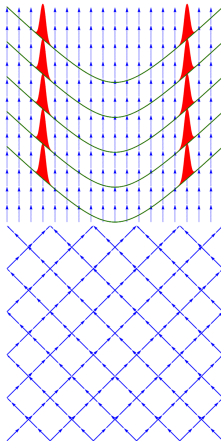
$$\phi(x, y) \sim \delta(y - u(x)) .$$



“Jenka”

Kokkupõrgeteta v.:

$$\mathcal{L}_r \phi = 0 .$$

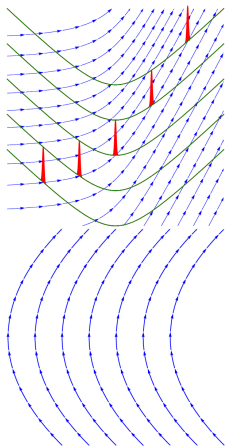


“Polka”

Vedelikutüübid

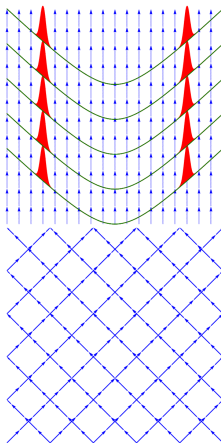
Geodeetiline tolm:

$$\phi(x, y) \sim \delta(y - u(x)).$$



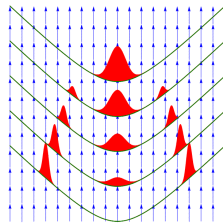
“Jenka”

Kokkupõrgeteta v.:
 $\mathcal{L}_r \phi = 0$.



“Polka”

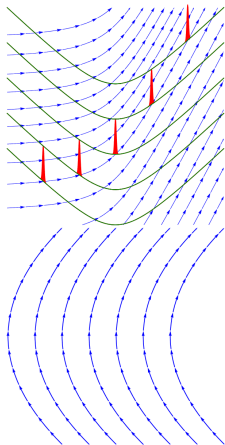
Kokkupõrgetega v.:
 $\mathcal{L}_r \phi \neq 0$.



Vedelikutüübid

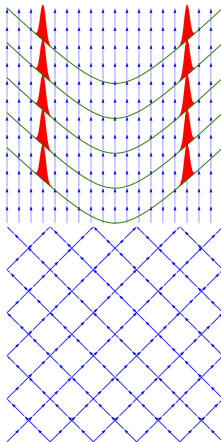
Geodeetiline tolm:

$$\phi(x, y) \sim \delta(y - u(x)).$$



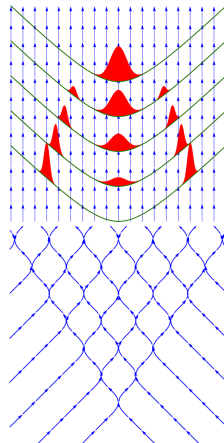
“Jenka”

Kokkupõrgeteta v.:
 $\mathcal{L}_r \phi = 0$.



“Polka”

Kokkupõrgetega v.:
 $\mathcal{L}_r \phi \neq 0$.



“Humpa”

- Cartani geomeetria põhimõisted:
 - Lie rühm G ja kinnine alamrühm $K \subset G$.
 - Raamikihtkond $\pi : P \rightarrow O$ on K -peakihhkond.
 - Cartani seostus $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ on 1-vorm väärtustega Lie algebras $\mathfrak{g}$.

- Cartani geomeetria põhimõisted:
 - Lie rühm G ja kinnine alamrühm $K \subset G$.
 - Raamikihtkond $\pi : P \rightarrow O$ on K -peakihhkond.
 - Cartani seostus $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ on 1-vorm väärtustega Lie algebras $\mathfrak{g}$.
- Finslerist Cartanini:
 - Rühmad $G = \text{ISO}_o(3, 1)$, $K = \text{SO}(3)$.
 - O on vaatajate ruum.
 - P on orienteeritud, normeeritud, ortogonaalsed raamid.
 - A defineeritakse Finsleri seostuse abil.

Seos Cartani geomeetriaga

- Cartani geomeetria põhimõisted:
 - Lie rühm G ja kinnine alamrühm $K \subset G$.
 - Raamikihtkond $\pi : P \rightarrow O$ on K -peakihkond.
 - Cartani seostus $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ on 1-vorm väärtustega Lie algebras $\mathfrak{g}$.
- Finslerist Cartanini:
 - Rühmad $G = \text{ISO}_o(3, 1)$, $K = \text{SO}(3)$.
 - O on vaatajate ruum.
 - P on orienteeritud, normeeritud, ortogonaalsed raamid.
 - A defineeritakse Finsleri seostuse abil.
- Rakendused:
 - Gravitatsiooniteooria: MacDowell-Mansouri teooria laiendus.
 - Väljateooria: kalibratsiooni teooriad.
 - Cartani geomeetria kirjeldab aegruumi sümmeetriat.
 - Seos silmuskvantgravitatsiooniga?

- 1 Üldrelatiivsusteooria
- 2 Vaatlused astronoomias ja kosmoloogias
- 3 Laiendatud teooriad
 - Skalaar-tensori teooriad
 - Multi-meetriline gravitatsiooniteooria
 - Teleparalleelne ja väändega teooriad
 - Finsleri ja Cartani geomeetriad
- 4 Kokkuvõte

- Üldrelatiivsusteooria kirjeldab gravitatsiooni geomeetria.

- Üldrelatiivsusteooria kirjeldab gravitatsiooni geomeetriaana.
- Vaatlused tekitavad küsimusi:
 - Tumeaine?
 - Tumeenergia?

- Üldrelatiivsusteooria kirjeldab gravitatsiooni geomeetriaana.
- Vaatlused tekitavad küsimusi:
 - Tumeaine?
 - Tumeenergia?
- Geomeetria pakub võimalikke lahendusi:
 - Skalaar-tensori teooriad
 - Multi-meetriline teooria
 - Teleparalleelne ja väändega teooriad
 - Finsleri ja Cartani geomeetriad

- Üldrelatiivsusteooria kirjeldab gravitatsiooni geomeetriaana.
- Vaatlused tekitavad küsimusi:
 - Tumeaine?
 - Tumeenergia?
- Geomeetria pakub võimalikke lahendusi:
 - Skalaar-tensori teooriad
 - Multi-meetriline teooria
 - Teleparalleelne ja väändega teooriad
 - Finsleri ja Cartani geomeetriad

Lugege edasi: <http://kodu.ut.ee/~manuel/>