Physik I und Einführung in die theoretische Physik I
Übungsaufgaben

Manuel Hohmann

11. Mai 2011

1. **Differentialoperatoren**
   Berechnen Sie den Gradienten folgender Skalarfelder bzw. Divergenz und Rotation folgender Vektorfelder:
   $$\phi(\vec{r}) = f(|\vec{r}|), \qquad \vec{A}(\vec{r}) = f(|\vec{r}|)\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

2. **Rechnen mit Indizes**
   Im folgenden gelte die Konvention, dass alle benutzten Indizes von 1 bis 3 laufen und dass über Indizes, die doppelt auftreten, summiert wird. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke, so weit es geht:

   (a) Für einen Vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$:
   $$a_ia_j\delta_{ij} =? \qquad a_ia_j\epsilon_{ijk} =? \qquad a_ia_ja_k\epsilon_{ijk} =?$$

   (b) Für ein Skalarfeld $\vec{\phi}$:
   $$\delta_{ij}\partial_i\partial_j\phi =? \qquad \epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j\phi =? \qquad \epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j\partial_k\phi =?$$

   (c) Für zwei Matrizen $S_{ij} = S_{ji}$ und $A_{ij} = -A_{ji}$:
   $$(S_{ij} + A_{ij})\delta_{ij} =? \qquad (S_{ij} + A_{ij})\epsilon_{ijk} =? \qquad S_{ij}A_{ij} =?$$

3. **Laplace-Operator**
   Als Laplace-Operator bezeichnet man den Operator $\triangle$, der definiert ist durch $\triangle = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$. Diesen kann man auf Skalarfelder $\phi(\vec{r})$ und Vektorfelder $\vec{A}(\vec{r})$ anwenden. Zeigen Sie, dass gilt:

   (a)
   $$\triangle\phi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\phi$$

   (b)
   $$\triangle\vec{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}$$

4. **Zentralkraft**
   Betrachten Sie die Bewegung einer konstanten Testmasse m in einem Zentralpotential, $V(\vec{r}) = V(|\vec{r}|)$. Zeigen Sie, dass der Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ zeitlich konstant ist.