

Physik I und Einführung in die theoretische Physik I

Übungsaufgaben

Manuel Hohmann

8. Dezember 2011

1. **Elliptische Funktionen und Integrale** (Abramowitz/Stegun, Kap. 16 & 17)
Betrachten Sie das elliptische Integral

$$u = \int_0^\phi \frac{d\phi'}{\sqrt{1 - m \sin^2 \phi'}}$$

mit dem Parameter $0 \leq m \leq 1$. Dieses definiert eine Schar von monotonen und somit invertierbaren Funktionen $u_m(\phi)$. Häufiger gebraucht werden aber die zugehörigen Umkehrfunktionen $\phi_m(u)$. Man bezeichnet

$$\phi_m(u) = \operatorname{am}(u|m)$$

als *Amplitude* von u und definiert weiter

$$\operatorname{sn}(u|m) = \sin \operatorname{am}(u|m) \quad \text{und} \quad \operatorname{cn}(u|m) = \cos \operatorname{am}(u|m).$$

- (a) Zeigen Sie, dass gilt

$$\frac{d}{du} \operatorname{sn}(u|m) = \operatorname{cn}(u|m) \operatorname{dn}(u|m) \quad \text{und} \quad \frac{d}{du} \operatorname{cn}(u|m) = -\operatorname{sn}(u|m) \operatorname{dn}(u|m),$$

wobei die Funktion $\operatorname{dn}(u|m)$ gegeben ist durch

$$\operatorname{dn}(u|m) = \sqrt{1 - m \sin^2 \operatorname{am}(u|m)}.$$

- (b) Drücken Sie die Ableitung

$$\frac{d}{du} \operatorname{dn}(u|m)$$

durch $\operatorname{sn}(u|m)$ und $\operatorname{cn}(u|m)$ aus.

- (c) Zeigen Sie, dass gilt

$$\operatorname{sn}(u|1) = \tanh u \quad \text{und} \quad \operatorname{cn}(u|1) = \operatorname{dn}(u|1) = \frac{1}{\cosh u}.$$

Hinweis: Auf dem Aufgabenblatt wird eine etwas ungewöhnliche Schreibweise für die elliptischen Funktionen benutzt. Für diese gilt $\operatorname{sn}(u, k) = \operatorname{sn}(u|k^2)$.

2. Schallwellen

- (a) Auf dem Dozentenpult befinden sich zwei Lautsprecher nebeneinander im Abstand d , die den gleichen Sinuston der Frequenz f abstrahlen. Sie befinden sich im Abstand s vom Pult in der Mitte zwischen beiden Lautsprechern. An dieser Stelle ist die Lautstärke maximal, d.h. wenn Sie sich zur Seite bewegen, wird der Ton leiser. Was folgt daraus für die Phasenbeziehung zwischen den beiden Lautsprechern?



- (b) Wenn Sie sich aus Ihrer Anfangsposition um die Strecke x_1 zur Seite bewegen, finden Sie ein Minimum der Lautstärke. Leiten Sie aus den Angaben d, s, x_1 eine Formel für die Frequenz her. Berechnen Sie die Frequenz für $d = 2\text{m}, s = 10\text{m}, x_1 = 2\text{m}$.
- (c) Sie bewegen sich weiter zur Seite. In welchem Abstand x_2 von ihrer Anfangsposition erwarten Sie wieder ein Maximum?
- (d) Die beiden Lautsprecher werden nun in die Mitte des Pults gebracht und Sie begeben sich zurück auf ihre Anfangsposition. Einer der beiden Lautsprecher bleibt auf dem Pult stehen, der andere wird mit konstanter Geschwindigkeit v auf Sie zu bewegt. Dabei hören Sie, dass die Lautstärke des Tons sich mit der Schwebungsfrequenz $\tilde{f}_+$ verändert. Wie groß ist die Geschwindigkeit v ? Nehmen Sie an, dass $\tilde{f}_+ = 0.5\text{Hz}$ ist.



- (e) Der Lautsprecher wird mit der gleichen Geschwindigkeit wieder von Ihnen weg bewegt. Mit welcher Schwebungsfrequenz $\tilde{f}_-$ verändert sich die Lautstärke diesmal?