

Physik I und Einführung in die theoretische Physik I

Übungsaufgaben

Manuel Hohmann

15. Dezember 2011

1. Rotation, Divergenz, Gradient

Zeigen Sie, dass für beliebige Vektorfelder $\vec{A}(\vec{r})$ und Skalarfelder $\phi(\vec{r})$ gilt:

(a)

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0$$

(b)

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi = \vec{0}$$

Geben Sie für jede der beiden Teilaufgaben zwei verschiedene Rechenwege an, und zwar unter Benutzung von

(1)

$$\operatorname{grad} \phi = \vec{\nabla} \phi, \quad \operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}, \quad \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

(2)

$$(\operatorname{grad} \phi)_i = \partial_i \phi, \quad \operatorname{div} \vec{A} = \sum_i \partial_i A_i, \quad (\operatorname{rot} \vec{A})_k = \sum_{i,j} \partial_i A_j \epsilon_{ijk}$$

mit dem Levi-Civita-Symbol, für das gilt $\epsilon_{123} = 1$ und $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = -\epsilon_{jik}$.

2. Konservativ oder nicht?

Betrachten Sie das Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

für $x^2 + y^2 \neq 0$.

(a) Berechnen Sie $\operatorname{rot} \vec{F}$.

(b) Berechnen Sie das Linienintegral

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

in kartesischen Koordinaten, wobei die Kurve C gegeben ist durch

$$\vec{r}(\lambda) = (R \cos \lambda, R \sin \lambda, 0), \quad 0 \leq \lambda \leq 2\pi.$$

(c) Drücken Sie $\vec{F}$ und C in Zylinderkoordinaten aus und berechnen Sie das Linienintegral damit noch einmal.

(d) Ist das Kraftfeld konservativ? Begründen Sie Ihre Aussage.

3. Lorentztransformation

- (a) Zeigen Sie, dass sich eine Lorentztransformation schreiben lässt als

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Lambda(\beta) \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

mit $\beta = v/c$ und $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$.

- (b) Zeigen Sie, dass für die Hintereinanderausführung von zwei Lorentztransformationen gilt

$$\Lambda(\beta') \cdot \Lambda(\beta) = \Lambda(\beta'')$$

und dass die Geschwindigkeit β'' gegeben ist durch die relativistische Geschwindigkeitsaddition

$$\beta'' = \frac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'}.$$

- (c) Zeigen Sie, dass gilt

$$\Lambda(\beta) \cdot \eta \cdot \Lambda(\beta)^T = \eta$$

und

$$\Lambda(-\beta) = \Lambda(\beta)^{-1} = \eta \cdot \Lambda(\beta)^T \cdot \eta,$$

wobei die Matrix η gegeben ist durch

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$