

Diskreetsed dünaamilised süsteemid

Manuel Hohmann

April 2, 2018

1 Atraktorid

Diskreetsed dünaamikat faasiruumis Q kirjeldab funktsioon $f : Q \rightarrow Q$ valem

$$\underline{x}_{n+1} = f(\underline{x}_n) \quad (1.1)$$

kaudu. Kui on antud ka algtingimus, ehk alguse punkt $\underline{x}_0 \in Q$ faasiruumis, siis määravad dünaamika ja algtingimus trajektoori

$$\underline{x}_0, \underline{x}_1 = f(\underline{x}_0), \underline{x}_2 = f(\underline{x}_1) = f^2(\underline{x}_0), \dots, \underline{x}_n = f^n(\underline{x}_0), \dots \quad (1.2)$$

Sümboliga f^n tähistame n korda rakendatud funktsioon f , ehk

$$f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ korda}}. \quad (1.3)$$

Süsteemi *püsipunkt* on punkt $\underline{x}_* \in Q$ mis rahuldab $f(\underline{x}_*) = \underline{x}_*$. *Perioodiline punkt* on punkt $\underline{x}_\#$ mis rahuldab $f^n(\underline{x}_\#) = \underline{x}_\#$, kus $n \in \mathbb{N}$. Punkti *periood* on kõige väiksem selline arv n . Püsipunkt on ehk perioodilise punkti erijuht, mille periood on $n = 1$. Perioodilise punktiga seotud punktid

$$\underline{x}_\#, f(\underline{x}_\#), \dots, f^{n-1}(\underline{x}_\#) \quad (1.4)$$

on selle punkti *perioodiline trajektoori*.

Näide 1.1. Olgu antud dünaamiline süsteem $Q = \mathbb{R}$ ja $f(x) = -x^3$. Mitmekordselt rakendatud funktsioon on

$$f^2(x) = f(f(x)) = -(-x^3)^3 = x^9, \dots, f^n(x) = (-1)^n x^{3^n}. \quad (1.5)$$

Selle süsteemi pusipunkt peab rahuldama tingimust

$$x_* = f(x_*) = -x_*^3. \quad (1.6)$$

Ainus püsipunkt on $x = 0$. Perioodilised punktid on 1 ja -1 , nende periood on 2.

Tihti huvitab meid, kuhu trajektoori “kauges tulevikus” sattub, kui süsteem areneb. Väga oluline mõiste on *atraktor*:

Definitsioon 1.1 (Atraktor). Faasiruumi alamhulka $A \subset Q$ nimetatakse *atraktoriks*, kui kehtib:

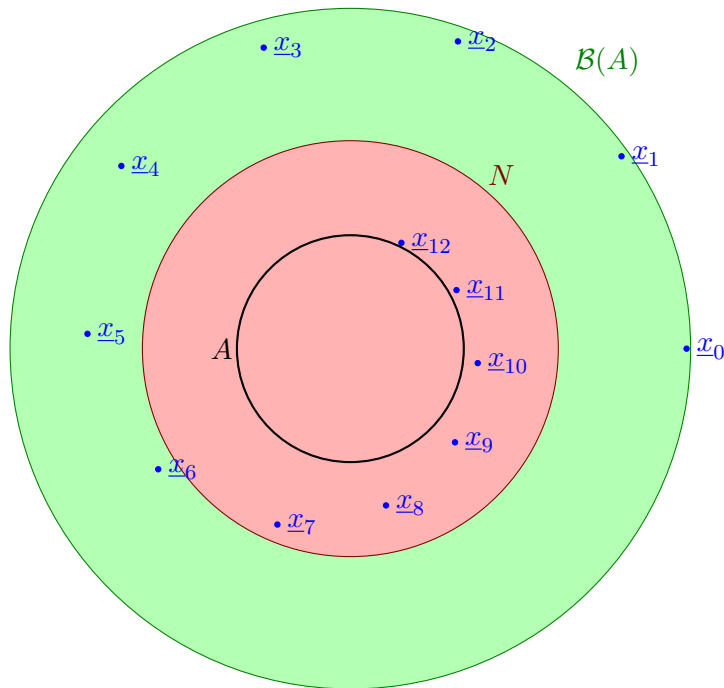


Figure 1: Atraktori selgitus.

- Igas punktis $\underline{x} \in A$ kehtib $f(\underline{x}) \in A$.
- On olemas lahtine ümbrus $\mathcal{B}(A) \supset A$, mida nimetatakse A atraktiivsuse basseiniks, kust dünaamika koondub atraktori juurde. See tähendab et $\mathcal{B}(A)$ sisaldab neid punkte $\underline{x}$ omadusega, et iga lahtise ümbruse $N \supset A$ korral leidub $n \in \mathbb{N}$ nii, et iga $m \geq n$ korral $f^m(\underline{x}) \in N$. Atraktiivsuse bassein on ehk hulk

$$\mathcal{B}(A) = \{\underline{x} \in Q \mid \forall N \supset A : \exists n \in \mathbb{N} : \forall m \geq n : f^m(\underline{x}) \in N\}. \quad (1.7)$$

- Ei ole võimalik hulka A jagada mitmesse ossa, mis rahuldavad neid tingimusi.

Atraktori mõiste selgitab joonis 1. Sel joonisel on atraktor ringikujuline hulk A , ja atraktiivsuse bassein on hulk $\mathcal{B}(A) \supset A$. Kui valitakse $\underline{x}_0 \in \mathcal{B}(A)$ ja lahtist ümbrust $N \subset \mathcal{B}(A)$, siis on olemas $n \in \mathbb{N}$ nii, et

$$\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} \subset N. \quad (1.8)$$

Mida “väiksem” on hulk N , seda suurem peab olema n , alates millest kuuluvad kõik $\underline{x}_n$ järgnevad punktid trajektoorist hulka N .

Näide 1.2. Kuna atraktori definitsioon on pigem abstraktne, selgitame seda varasemalt välja toodud näite $Q = \mathbb{R}$ ja $f(x) = -x^3$ abil. Kui me valime $x_0 \in (-1, 1)$, siis on lihtne näha, et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n x_0^{3^n} = 0. \quad (1.9)$$

See tähendab, et iga $\epsilon > 0$ korral on olemas $n \in \mathbb{N}$ nii, et

$$\{x_n, x_{n+1}, \dots\} \subset N_\epsilon = (-\epsilon, \epsilon). \quad (1.10)$$

Järelikult on $A = \{0\}$ atraktor, ja tema atraktiivsuse bassein on $\mathcal{B}(A) = (-1, 1)$.

Kui atraktor koosneb püsipunktist $A = \{\underline{x}_*\}$ või perioodilisest trajektoorist $A = \{f^0(\underline{x}_\#), \dots, f^{n-1}(\underline{x}_\#)\}$, siis öeldakse, et püsipunkt / trajektoor on *stabiilne*. Atraktori definitsioon näitab, mis tingimustel on püsipunkt stabiilne. Olgu $A = \{\underline{x}_*\}$, kus $\underline{x}_* \in Q$ on suvaline punkt. Selleks, et A on atraktor, peab kehtima:

- Sellest tingimusest, et $f(\underline{x}_*) \in A$, ja ainus punkt mida A sisaldab on $\underline{x}_*$, järeldeb $f(\underline{x}_*) = \underline{x}_*$. Järelikult peab $\underline{x}_*$ olema püsipunkt.
- Atraktoril peab olema atraktiivsuse bassein. Selle tingimuse uurimiseks aitab meid Taylori rida

$$\begin{aligned} f_i(\underline{x}) &= f_i(\underline{x}_*) + \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\underline{x}=\underline{x}_*} (\underline{x}_* - \underline{x}) + \mathcal{O}((\underline{x}_* - \underline{x})^2) \\ &= x_{*i} + \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\underline{x}=\underline{x}_*} (\underline{x}_* - \underline{x}) + \mathcal{O}((\underline{x}_* - \underline{x})^2), \end{aligned} \quad (1.11)$$

ja me eeldame, et $\underline{x}$ on valitud piisavalt väikesest ümbrusest $U \ni \underline{x}_*$ nii, et lineaars-est lähendusest piisab. Me soovime näidata, et $U \subset \mathcal{B}(A)$, see tähendab, et kõik trajektoolid, mis algavad hulgast U , koonduvad hulka A . Selleks, et trajektoor koon-
dub püsipunktile, on vaja, et kaugusvektor $\underline{x}_* - \underline{x}$ tõmbuks kokku, sõltumatult oma suunast. See tähendab, et kõik Jacobi matriksi

$$J^i_j(\underline{x}_*) = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\underline{x}=\underline{x}_*} \quad (1.12)$$

omaväärtused λ peavad rahuldama $|\lambda| < 1$.

- Viimane tingimus, et hulka A ei saa jagada mitmesse ossa, on alati rahuldatud, kui A koosneb ainult ühest punktist.

Me järeldeb:

Teoreem 1.1. *Diskreetse dünaamika $f : Q \rightarrow Q$ püsipunkt $\underline{x}_*$ on stabiilne, kui kõik Jacobi matriksi omaväärtused λ punktis $\underline{x}_*$ rahuldavad $|\lambda| < 1$.*

Veel lihtsam on tingimus, kui süsteem on ühemõõtmeline. Sel juhul on Jacobi matriksil ainult üks komponent $f'(x_*)$, ja peab kehtima $|f'(x_*)| < 1$. Sarnasel viisil saab näidata, millisel tingimusel on perioodiline trajektoor stabiilne:

Teoreem 1.2. *Diskreetse dünaamika $f : Q \rightarrow Q$ perioodiline trajektoor $A = \{f^0(\underline{x}_\#), \dots, f^{n-1}(\underline{x}_\#)\}$ on stabiilne, kui korduvalt rakendatud funktsiooni f^n Jacobi matriksi*

$$\underline{\underline{J}}^{(n)}(\underline{x}_\#) = \underline{\underline{J}}(f^{n-1}(\underline{x}_\#)) \cdot \dots \cdot \underline{\underline{J}}(f^0(\underline{x}_\#)) \quad (1.13)$$

omaväärtused λ rahuldavad $|\lambda| < 1$.

Ka see tingimus lihtsustub, kui süsteem on ühemõõtmeline. Perioodiline trajektoor $A = \{f^0(x_{\#}), \dots, f^{n-1}(x_{\#})\}$ on stabiilne, kui korduvalt rakendatud funktsiooni f^n tuletis

$$(f^n)'(x_{\#}) = \prod_{k=0}^{n-1} f'(f^k(x)) \quad (1.14)$$

rahuldab $|(f^n)'(x_{\#})| < 1$.

2 Feigenbaumi stsenaariumid

Üks tuntumatest ja samas ka kõige lihtsamatest diskreetsetest dünaamilistest süsteemidest on *logistiline kujutus*, mis on järgnevalt defineeritud:

Definitsioon 2.1 (Logistiline kujutus). *Logistiline kujutus* on kujutus

$$\begin{aligned} f_r : [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto rx(1 - x) \end{aligned} \quad (2.1)$$

faasiruumis $Q = [0, 1]$, mis sõltub parameetrist $r \in [0, 4]$.

Kõigepeal uurime logistilise kujutuse pikaajalist käitumist sõltuvalt parameetrist r . Selleks joonistame *Feigenbaumi diagrammi*, mis näitab suvalise algtingimuse x_0 korral trajektoori osa $x_{n_1}, \dots, x_{n_2}$ erinevate parameetri väärtuste puhul. Joonisel 2 on $n_1 = 500$, $n_2 = 700$ ja $r = 0, 1/250, \dots, 4$. Me näeme, et käitumine sõltub tugevalt parameetri väärtusest:

- Kui $0 < r < 1$, siis on stabiilne püsipunkt $x_* = 0$, kuna $f_r(0) = 0$ ja

$$-1 < f'_r(0) = r < 1. \quad (2.2)$$

- Kui $r = b_0 = 1$, muutub püsipunkt $x_* = 0$ ebastabiilseks. Selle asemel muutub püsipunkt $x_* = 1 - \frac{1}{r}$ stabiilseks, kuna

$$-1 < f'_r\left(1 - \frac{1}{r}\right) = 2 - r < 1, \quad (2.3)$$

kui $1 < r < 3$.

- Kui $r = b_1 = 3$, muutub ka püsipunkt $x_* = 1 - \frac{1}{r}$ ebastabiilseks. Selle asemel ilmub stabiilne perioodiline trajektoor, mille periood on 2, ja mida me leiame, kui me lahendame $f_r^2(x_{\#}) = x_{\#}$:

$$x_{\#}^{\pm} = \frac{r + 1 \pm \sqrt{(r - 3)(r + 1)}}{2r}. \quad (2.4)$$

Tema stabiilsust näitab tuletis

$$(f_r^2)'(x_{\#}^{\pm}) = f'_r(x_{\#}^{+})f'_r(x_{\#}^{-}) = -r^2 + 2r + 4, \quad (2.5)$$

millest järeldub, et see perioodiline trajektoor on stabiilne kui $3 < r < 1 + \sqrt{6}$.

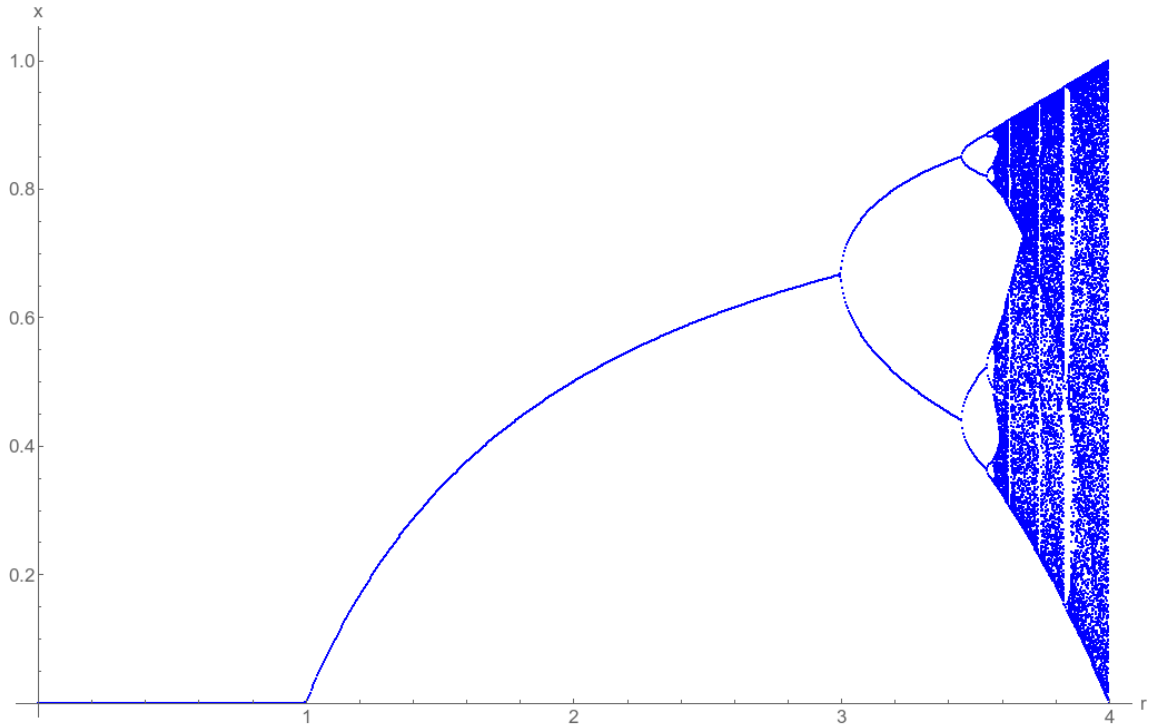


Figure 2: Logistilise kujutuse Feigenbaumi diagramm.

- Kui $r = b_2 = 1 + \sqrt{6}$, muutub ka kahest punktist koosnev perioodiline trajektoor ebastabiilseks, ja selle asemel ilmub neljast punktist koosnev trajektoor, mis on stabiilne kuni parameetri väärtuseni $r = b_3$, kus ta muutub ebastabiilseks. Siis ilmub kaheksast punktist koosnev trajektoor, jne. Vahemikud (b_n, b_{n+1}) , milles on perioodiga 2^n trajektoor stabiilne, saavad järjest väiksemaks. Jada (b_n) koondub *Feigenbaumi punktile*

$$b_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \approx 3.5699456718709 \dots \quad (2.6)$$

Vahemikute pikkuste suhted koonduvad *Feigenbaumi konstandile*

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n^b = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-1} - b_{n-2}}{b_n - b_{n-1}} \approx 4.66920160910299067 \dots \quad (2.7)$$

- Feigenbaumi punktis $r = b_\infty$ muutuvad perioodilised trajektoolid ebastabiilseks, ja süsteemi käitumine muutub *kaootiliseks*. Kaootilises parameetri vahemikus on ka *perioodilised aknad*, kus süsteem käitub jälle perioodiliselt.

Selle süsteemi käitumise sõltuvust parameetrist - püsipunktid, perioodilised trajektoolid kasvava perioodiga, üleminek kaosesse - nimetatakse *Feigenbaumi stsenaariumiks*. Käitumise muutusi punktides b_n , kus üks perioodiline trajektoor muutub ebastabiilseks, ja selle asemel ilmud uus stabiilne trajektoor kaks kord pikema perioodiga, nimetatakse *bifurkatsioonideks*. Neid parameetri väärtusi b_n arvuti abil numbriliselt leida on aeglane protsess, kuna nendes punktides koonduvad trajektoolid kõige aeglasemalt atraktorile. Palju kiirem

leida saab neid parameetri väärtusi s_n , mis on *üliatraktiivsed*, ja kus trajektoorid koonduvad kõige kiiremini. Seal kehtib

$$(f_{s_n}^N)'(x_{\#}) = 0, \quad N = 2^{n-1}. \quad (2.8)$$

Kui me soovime seda valemit rakendada, et leida s_n , peame kõigepeal punkti $x_{\#}$ perioodilise trajektoori peal leidma. Kõige parem meetod selleks on kasutada teadmist, et

$$(f_{s_n}^N)'(x_{\#}) = \prod_{k=0}^{N-1} f'_{s_n}(f_{s_n}^k(x_{\#})), \quad (2.9)$$

ja et see võrdub nulliga siis kui üks faktor korrutises võrdub nulliga. Kuna aga funktsioonil f_r on ainult üks maksimum punktis $\bar{x} = \frac{1}{2}$, kus siis kehtib $f'_r(\bar{x}) = 0$, järeldub et $\bar{x} \in A$ peab olema punkt perioodilise trajektoori peal, kui $r = s_n$ on üliatraktiivne. Punkti s_n leidmiseks lahendame siis hoopis võrrandi

$$g_N(s_n) = f_{s_n}^N(\bar{x}) - \bar{x} = 0. \quad (2.10)$$

Kui $n = 1$, siis

$$g_1(s_1) = f_{s_1}(\bar{x}) - \bar{x} = \frac{s_1 - 2}{4}, \quad (2.11)$$

ja me leiame $s_1 = 2$, mis asub vahemikus $s_1 \in (b_0, b_1) = (1, 3)$. Järgmine punkt peab asuma vahemikus $s_2 \in (b_1, b_2) = (3, 1 + \sqrt{6})$. Võrrandi

$$g_2(s_2) = -\frac{s_2^3 - 4s_2^2 + 8}{16} \quad (2.12)$$

abil leiame $s_2 = 1 + \sqrt{5}$. Ülejäänud punktid on lihtsam numbriliselt arvutada. Kõige kiirem meetod selle võrrandi lahendamiseks on Newtoni meetod. Selleks peame $g'_N(r)$ arvutama, mis on võimalik järgneva skeemiga. Funktsiooni g_N kohta kehtib rekursioonivalem

$$g_k(r) + \bar{x} = f_r^k(\bar{x}) = f_r(f_r^{k-1}(\bar{x})) = f_r(g_{k-1}(r) + \bar{x}). \quad (2.13)$$

Sellest järeldub

$$g_k(r) = r[g_{k-1}(r) + \bar{x}][1 - g_{k-1}(r) - \bar{x}] - \bar{x} = \frac{r-2}{4} - r[g_{k-1}(r)]^2. \quad (2.14)$$

Selle tuletise arvutame rekursioonivalemiga

$$g'_k(r) = \frac{1}{4} - g_{k-1}(r)[g_{k-1}(r) + 2rg'_{k-1}(r)]. \quad (2.15)$$

Rekursiooni algus on funktsioon

$$g_0(r) = f_r^0(\bar{x}) - \bar{x} = \bar{x} - \bar{x} = 0. \quad (2.16)$$

Kuna $g_0(r)$ ei sõltu parameetrist, kehtib $g'_0(r) = 0$ Seda skeemi rakendab järgnev programm Pythoni keeles:

```
1 #!/usr/bin/python3
2 # -*- coding: utf-8 -*-
3
4 # me kasutame sympy, et arvutada kõrgema täpsusega
```

```

5  from sympy import *
6
7  # mitu numbrikohta kasutada arvutuses
8  prec = 50
9  # üliatraktiivse punkti täpsus
10 diff = 1e-40
11 # mitu  $s_n$  ja  $\delta_n$  arvutada
12 kmax = 20
13
14 #  $s_1 = 2$ 
15 r1 = N(2, prec)
16 #  $s_2 = 1 + \sqrt{5}$ 
17 r2 = N(1 + sqrt(5), prec)
18 #  $c = \frac{1}{4}$ 
19 c4 = N(1/4, prec)
20 #  $\delta \approx 4.7$ 
21 delta = N(47/10, prec)
22 # trajektoori periood, millest arvutus algab
23 n = 2
24
25 for k in range(3, kmax + 1):
26     # järgmine  $s_n$  peaks umbes siin olema
27     r = r2 + (r2 - r1) / delta
28     # vastava trajektoori periood on kaks kord suurem
29     n *= 2
30     # koondumist mõõdame võrreldes eelmise sammu tulemusega
31     r0 = r2
32
33     # kasutame Newtoni meetodi
34     while abs(r - r0) > diff:
35         # eelmise Newtoni sammu tulemus
36         r0 = r
37
38         # stardipunkt on  $g_0(r) = 0$ 
39         g = 0
40         # lisaks paneme  $g'_0(r) = 0$ 
41         dg = 0
42
43         # arvutame  $g_n(r)$  ja  $g'_n(r)$ 
44         for _ in range(n):
45             #  $g'_{i+1}(r) = \frac{1}{4} - g_i(r)[g_i(r) + 2rg'_i(r)]$ 
46             dg = c4 - g * (g + 2 * r * dg)
47             #  $g_{i+1}(r) = \frac{r-2}{4} - r[g_i(r)]^2$ 
48             g = (r - 2) / 4 - r * g * g
49
50         # nüüd on  $g' = g'_n(r)$  ja  $g = g_n(r)$ , ja me saame järgmist sammu
51         r -= g / dg
52
53     # arvutame  $\delta_k$ 

```

```

54     delta = (r2 - r1) / (r - r2)
55     r1 = r2
56     r2 = r
57
58     # praeguse sammu tulemus
59     print("s[%2d] = " % k, r, ", d[%2d] = " % k, delta)

```

Nagu ka bifurkatsioonide b_n kohta kehtib ka üliatraktiivsete punktide kohta s_n et nad koonduvad Feigenbaumi punktile,

$$s_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = b_\infty, \quad (2.17)$$

ja et vahemikute pikkuste suhted koonduvad Feigenbaumi konstandile,

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n^s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n-1} - s_{n-2}}{s_n - s_{n-1}}. \quad (2.18)$$

3 Lyapunovi eksponent

Eelmises osas oleme näinud, et logistilise kujutuse $f_r(x) = rx(1-x)$ käitumine sõltub oluliselt parameetri r väärtusest. Trajektoorid võivad koonduda püsipunktile või perioodilisele trajektoorile, või olla kaoatilised. Koondumine võib olla kiire, kui r on üliatraktiivne punkt, või aeglane, kui r on bifurkatsioonipunkt. Käesolevas osas huvitab meid, kuidas me saame kvantitatiivselt määrata, kas ja kui kiirelt dünaamika koondub, või kui kaootiliselt ta käitub. Selleks on kasulik vaadata kaks trajektoori, mis algavad lähedastest punktidest x_0 ja $\tilde{x}_0 = x_0 + \epsilon$, ja vaadata, kuidas nende kaugus $|x_n - \tilde{x}_n|$ areneb. Täpsemalt huvitab meid, kuidas nende kaugus igal sammul keskmiselt suureneb või väheneb, ehk kuidas suhe

$$\frac{|x_{k+1} - \tilde{x}_{k+1}|}{|x_k - \tilde{x}_k|} \quad (3.1)$$

areneb. Kui alguses oli kaugus $|\epsilon|$, siis pärast n korda f_r rakendamist on kaugus

$$|x_n - \tilde{x}_n| = |\epsilon| \prod_{k=0}^{n-1} \frac{|x_{k+1} - \tilde{x}_{k+1}|}{|x_k - \tilde{x}_k|} = |\epsilon| \exp \left(\sum_{k=0}^{n-1} \ln \frac{|x_{k+1} - \tilde{x}_{k+1}|}{|x_k - \tilde{x}_k|} \right). \quad (3.2)$$

Sellest järeldub, et keskmine kasvutegur iga sammu kohta on

$$\exp \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \frac{|x_{k+1} - \tilde{x}_{k+1}|}{|x_k - \tilde{x}_k|} \right). \quad (3.3)$$

Kui me soovime teada, kuidas kasvutegur areneb kauges tulevikus $n \rightarrow \infty$, ja kui trajektoorid on hääbuva algse kaugusega, siis jõuame *Lyapunovi eksponenti* definitsioonini:

Definitsioon 3.1 (Lyapunovi eksponent). Olgu $f_r : Q \rightarrow Q$ funktsioon faasiruumis $Q \subset \mathbb{R}$, mis sõltub parameetrist r . Funktsiooni *Lyapunovi eksponent* on

$$\lambda_r(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \frac{|x_{k+1} - \tilde{x}_{k+1}|}{|x_k - \tilde{x}_k|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left| f_r' \left(f_r^k(x) \right) \right|, \quad (3.4)$$

kus $x_0 = x$ ja $\tilde{x}_0 = x + \epsilon$.

Oluline küsimus on see, kuidas Lyapunovi eksponent $\lambda_r(x)$ sõltub algtingimusest x . Kui me valime algtingimuse x asemel $f_r^m(x)$, kus $m \in \mathbb{N}$, siis leiame

$$\begin{aligned}
\lambda_r(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left| f'_r \left(f_r^k(x) \right) \right| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sum_{k=0}^{m-1} \ln \left| f'_r \left(f_r^k(x) \right) \right| + \sum_{k=m}^{n-1} \ln \left| f'_r \left(f_r^k(x) \right) \right| \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-m-1} \ln \left| f'_r \left(f_r^{k+m}(x) \right) \right| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+m} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left| f'_r \left(f_r^{k+m}(x) \right) \right| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left| f'_r \left(f_r^{k+m}(x) \right) \right| \\
&= \lambda_r(f^m(x)),
\end{aligned} \tag{3.5}$$

kus esimene liige nurksulgudes ei panusta, kuna see on konstantne liige mida jagatakse n -ga, ja lõpuks saime $n+m$ hoopis n -ga asendada, kuna

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m} \right) a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n(n+m)} a_n = 0 \tag{3.6}$$

kui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \tag{3.7}$$

koondub. Lyapunovi eksponent ei muutu, kui me valime algtingimuse x asemel muud punkti sama trajektoori peal. Sellest järeldub:

Teoreem 3.1. *Kui algtingimusele x vastav trajektoor koondub atraktorile A , siis Lyapunovi eksponent ei sõltu valikust $x \in \mathcal{B}(A)$, vaid ainult atraktorist, mille atraktiivsuse basseini x kuulub.*

See teoreem aitab meid, kui me soovime Lyapunovi eksponendi numbriliselt arvutada. Kõige lihtsam meetod on valida algtingimust x , rakendada funktsiooni f_r mitu korda kuni trajektoor on sattunud atraktori piisavalt lähemale, ja siis arvutada, kuidas f'_r käitub trajektoori käigul. Seda näitab järgnev programm Pythoni keeles:

```

1 # matemaatilised funktsioonid, mida me kasutame
2 from math import fabs, log
3
4 def fkt(r, x):
5     # TODO: defineeri  $f_r(x)$ 
6
7 def dfkt(r, x):
8     # TODO: defineeri  $f'_r(x)$ 
9
10 # mitu korda rakendada  $f$ , enne kui me hakkame kokku liituma
11 pre = 100
12 # mitu korda liidame kokku

```

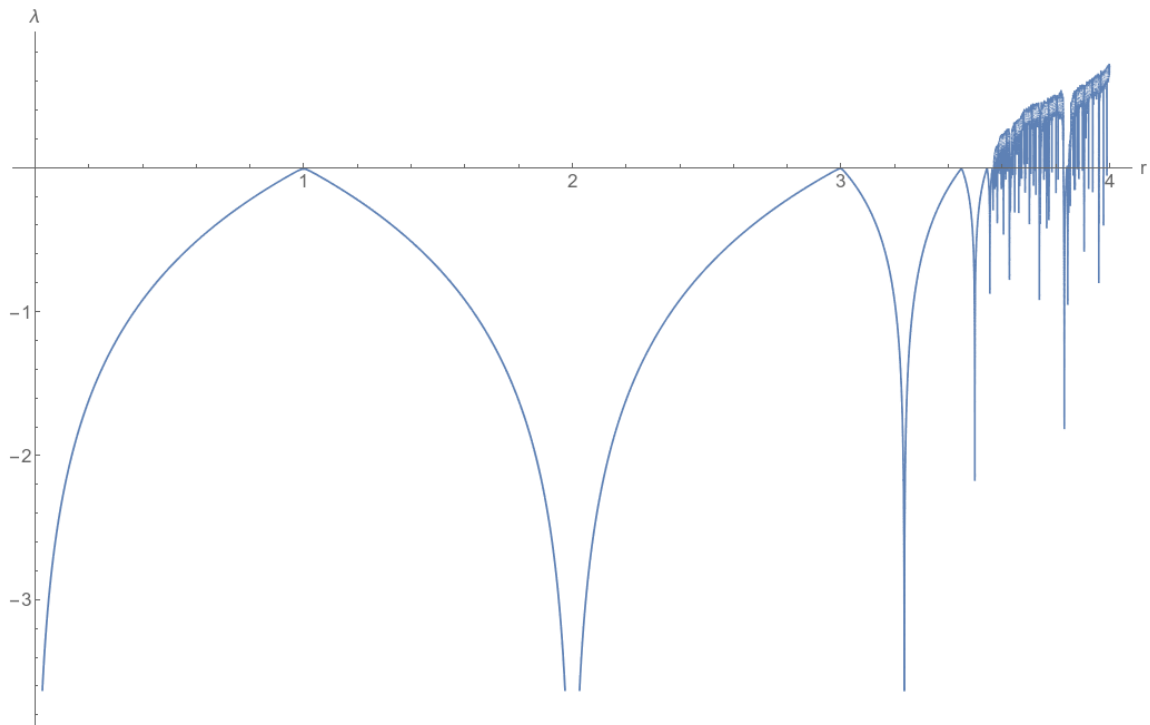


Figure 3: Logistilise kujutuse Lyapunovi eksponent.

```

13 itmax = 200
14
15 def lyapunov(r, x0):
16     x = x0 # algtingimus
17     lyap = 0
18
19     # rakendame f mitu korda, et saada atraktori lähemale
20     for i in range(pre):
21         x = fkt(r, x)
22
23     # rakendame f mitu korda, et uurida f' atraktori ümbruses
24     for i in range(itmax):
25         x = fkt(r, x)
26         lyap += log(fabs(dfkt(r, x)))
27
28     # lõpuks arvutame keskväärtust
29     return lyap / itmax

```

Joonis 3 näitab logistilise kujutuse Lyapunovi eksponenti, mis sai arvutatud selle meetodiga. Jooniselt leiame järgnevaid omadusi:

- Üliatraktiivsetes punktides s_n on $\lambda_r(x) = -\infty$, mis järeldub sellest, et $\left(f_{s_n}^{2^{n-1}}\right)'(x) = 0$, kui x kuulub atraktorile. Sel juhul koonduvad trajektoorid kõige kiiremalt.

- Bifurkatsioonipunktides b_n on $\lambda_r(x) = 0$, et $\left| \left(f_{b_n}^{2^{n-1}} \right)'(x) \right| = 1$, kui x kuulub atraktorile. Sel juhul koonduvad trajektoorid kõige aeglasemalt.
- Kui süsteem käitub kaootiliselt, on Lyapunovi eksponent positiivne. Lähedaste trajektooride kaugus kasvab eksponentsiaalselt.
- Kui süsteem käitub perioodiliselt, on Lyapunovi eksponent negatiivne. Lähedaste trajektooride kaugus langeb eksponentsiaalselt.